Les Applications

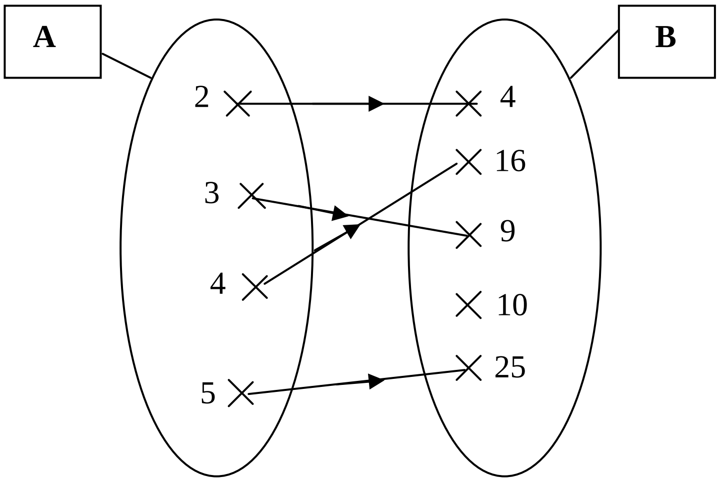
Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

I) Définitions d'une application et d'une fonction :

1°) Définition d'une application :

Soient A et B deux ensembles non vides. Une application de A dans B est une relation de A vers B qui à chaque élément de l'ensemble de départ A associe un seul élément de l'ensemble d'arrivée B.

2°) Exemple de représentation sagittale :



3°) Notation :

$f : A \rightarrow B$ " f envoie A dans B "

$2 \mapsto 7$ " 2 a pour image 7 "

$f : x \mapsto y$ Signifie que « *x a pour image y* » ou « *x est l'antécédent de y* ».

4°) Définition d'une fonction :

Une relation de A vers B est une fonction de A vers B, si chaque élément de l'ensemble de départ A possède au plus une image dans l'ensemble d'arrivée B.

Remarque :

Toute application est une fonction, mais toute fonction n'est pas une application.

II – Applications particulières :

1°) Application bijective :

- Définition : Une application f de l'ensemble A dans l'ensemble B est une application bijective (ou bijection), si tout élément de B possède un unique antécédent dans A par f .

- Théorème : Soit $f : A \to B$

$(f : A \to B \text{ est bijective}) \Leftrightarrow (\forall y \in B\ \exists!\, x \in A /\ y = f(x))$

- Exemple : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  $x \mapsto 3x+5$. f est-elle bijective ?

Réponse : Soit y un élément de $\mathbb{R}$ tels que $f(x) = y$.

$f(x) = y \Leftrightarrow 3x+5 = y \Leftrightarrow 3x = y-5 \Leftrightarrow x = \dfrac{y-5}{3}$ *unique d'où f est bijective.*

2°) Application injective :

- Définition : Une application f de l'ensemble A dans l'ensemble B est une application injective (ou injection), si tout élément de B possède 0 ou 1 antécédent dans A par f.

- Théorème : Soit $f : A \to B$

$(f : A \to B \text{ est injective}) \Leftrightarrow (\forall x \in A, \forall x' \in A, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$.

- Exemple : Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$
  $x \mapsto x^2+1$. f est-elle injective ?

Réponse : Soient x et x' deux éléments de $\mathbb{R}_+$ tels que $f(x) = f(x')$.

$f(x) = f(x') \Leftrightarrow x^2+1 = x'^2+1 \Leftrightarrow x^2 = x'^2 \Leftrightarrow x = x'$ *ou* $x = -x' \notin IR_+$

D'où f est injective.

3°) Application surjective :

- Définition : Une application f de l'ensemble A dans l'ensemble B est une application surjective (ou surjection), si tout élément de B possède 1 ou plusieurs antécédent dans A par f.
- Théorème : Soit $f : A \to B$
- $(f : A \to B \text{ est surjective}) \Leftrightarrow (\forall y \in B\ \exists\, x \in A /\ y = f(x))$

- Exemple : Soit $f : \mathbb{R} \to [-1\ ;+\infty[$
  $x \mapsto x^2-1$. f est-elle surjective ?

Soit y un élément de $[-1\ ;+\infty[$ tels que $f(x) = y$.

$f(x) = y \Leftrightarrow x^2-1 = y \Leftrightarrow x^2 = y+1 \Leftrightarrow x = \sqrt{y+1}$ *où* $x = -\sqrt{y+1}$

D'où f est surjective.

4°) Théorème :

Une application f de A dans B est bijective si elle est à la fois injective et surjective.

5°) Remarque : Dans la pratique pour montrer qu'une application est soit bijective, soit injective, soit surjective, on résout : $\forall$y$\in$ B l'équation $f(x)=y$.

- Si $f(x)=y$ admet 1 solution unique x, alors f est bijective.
- Si $f(x)=y$ admet 0 ou 1 solution x, alors f est injective.
- Si $f(x)=y$ admet 1ou plusieurs solutions x, alors f est surjective.

III– Application réciproque d'une bijection :

1°) Définition : On appelle application réciproque d'une bijection f de A sur B, la bijection notée : f^{-1}de B sur A. $f: A \rightarrow B$; $f^{-1}: B \rightarrow A$

$$\forall y \in B, \forall x \in A, \quad y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

2°) Exemple : Soit $g: IR - \{2\} \rightarrow IR - \{1\}$

$$x \mapsto g(x) = \frac{x-1}{x-2}$$

Montrer que g est bijective, puis déterminer g $^{-1}$.

Réponse : Soit $y \in IR - \{1\}$ *montrons* $\exists!\, x \in IR - \{2\}$ *tel que* $g(x)=y$.

$$g(x)=y \Leftrightarrow \frac{x-1}{x-2}=y \Leftrightarrow y(x-2)=x-1 \Leftrightarrow x(y-1)=2y-1 \Leftrightarrow x=\frac{2y-1}{y-1} \text{unique}$$

donc g est bijective . D'où $g^{-1}: IR-\{1\} \rightarrow IR-\{2\}$

$$t \mapsto \frac{2t-1}{t-1}$$

IV– Composition des applications :

1°) Définition : f étant une fonction de E vers F, g une application de B vers G, la fonction notée : $g \circ f$ de E vers G est définie par :

$$g \circ f : E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

$$. \quad x \mapsto (g \circ f)(x) = g[f(x)] \quad .$$

et s'appelle la composée de f par g .

2°) Exemples :

soit $f: x \mapsto f(x) = 2x+1$; $g: x \mapsto g(x) = \dfrac{1}{x}$; $h: x \mapsto h(x) = x^2$

Trouver les ensembles de définition de chacune des fonctions f ; g *et* h puis calculer $g \circ f(3)$; $f \circ g(3)$; $g \circ f(-2)$; $f \circ g(-2)$; $g \circ f(x)$; $h \circ f(x)$.

Réponse : $g \circ f(3) = g[f(3)] = g(7) = \dfrac{1}{7}$. $f \circ g(3) = f[g(3)] = f(\dfrac{1}{3}) = \dfrac{5}{3}$.

$$g \circ f(x) = g[f(x)] = g(2x+1) = \frac{1}{2x+1}; \quad h \circ f(x) = h[f(x)] = h(2x+1) = (2x+1^2)$$

V– Image directe – Image réciproque par une application :

1°) **Image directe**

a°) Définition : Soit f une fonction de E vers F d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$, et A une partie de E. On appelle image directe (ou image) de A par f notée $f(A)$ l'ensemble des images par f de tous les éléments de A $\cap$Df.

b°) Exemple : soit $f : IR \to IR$

$$x \to \frac{1}{x+1}.$$

Trouver les images par f de chacun des intervalles de IR -1suivants :
A =]–1 ; 4] ; B = [–5 ; 3].

Réponse : f est définie si $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$; $Df=IR-\{-1\}$.

- *Image directe de A=]-1 ; 4] par f .*

  $$\forall\ x \in Df, x \in A, \quad \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq x+1 \leq 5 \Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq \frac{1}{x+1}$$

  $$\Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq f(x); \ D'où\ f(A) = [\frac{1}{5}; +\infty[\quad .$$

- *Image directe deB=[-5 ; 3] par f .*

  $$\forall\ x \in Df, x \in B \ \Leftrightarrow x \in [-5 ; -1[\ \cup]-1; 3]$$

  $$-5 \leq x \prec -1 \qquad ; \qquad -1 \prec x \leq 3$$

  $$-4 \leq x+1 \prec 0 \qquad ; \qquad 0 \prec x+1 \leq 4$$

  $$\frac{1}{x+1} \leq -\frac{1}{4} \qquad ; \qquad \frac{1}{4} \leq \frac{1}{x+1}$$

  D'où $f(B) = \left]-\infty; -\frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$.

2°) Image réciproque

a°) Définition : Soit f une fonction de E vers F d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$, et B une partie de F. On appelle image réciproque de B par f , la partie de $\mathcal{D}_f$, notée : $f^{-1}(B)$ constitué des antécédents par f de tous les éléments de B.

b°) Remarque : Comment chercher l'image réciproque ?

Pour trouver l'image réciproque d'un intervalle B de $\mathbb{R}$ par une fonction f d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$, on résout l'un des systèmes d'inconnue x suivants :

– Si B=[a,b] on résout x $\in \mathcal{D}_f$; a $\leq f(x) \leq$b.

– Si B=]a,b[on résout x $\in \mathcal{D}_f$; a $< f(x) <$ b.

– Si B=[a,b[on résout x $\in \mathcal{D}_f$; a $\leq f(x) <$b.

– Si B={b} on résout x $\in \mathcal{D}_f$; $f(x) = b$

– Si B=]-∞,a] on résout x $\in \mathcal{D}_f$; $f(x) \leq$a.

– Si B=]a,+∞[on résout x $\in \mathcal{D}_f$; a $< f(x)$.

c°) Exemples : soit $f : IR \to IR$; $g : IR \to IR$

$x \mapsto 2x-1$ $\qquad$ $x \mapsto x^2 - x - 2$

- Trouver l'image réciproque par f de B=[1 ; 3]
- Trouver l'image réciproque par g de B=$\{\ 0\ \}$

VI– Coïncidence de deux fonctions sur un ensemble :

1°) Définition : soit $f : IR \to IR$; $g : IR \to IR$

$x \mapsto f(x)$ $\qquad$ $x \mapsto g(x)$

Soit C un sous-ensemble de $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$.

$$\begin{pmatrix} f \ et \ g \ coïncident \\ sur \ C \end{pmatrix} \overset{si \ et \ seulement \ si}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} \forall \ x \in C \\ f(x) = g(x) \end{pmatrix}$$

2°) Exemple : soit $f : IR \to IR$; $g : IR \to IR$

$x \mapsto f(x) = |2x-1| + |1-x|$; $\qquad$ $x \mapsto g(x) = 3x-2$

- Trouver la partie C de ℝ sur laquelle f *et* g coïncident.

Réponse :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
| 2 x –1 |		– 2x + 1	0	2x – 1		2x – 1	
|1– x |		1 – x		1 – x	0	–1 + x	
f (x)		–3x + 2	$\frac{1}{2}$	x	1	3x – 2	

Pour $x \in C = [1\,;+\infty[$ $\quad f(x) = g(x)$ *donc* f *et* g *coïncident sur* C.

VII– Restriction d'une application :

1°) Définition : Soit f une application de A dans B, et X une partie de A. On appelle restriction de f à X l'application de X dans B notée : $f/_X$ définie par :

$\forall \ x \in X, \left(f/_X \right)(x) = f(x)$.

2°) Exemple : Soit $f : x \mapsto f(x) = |2x-1| + |1-x|$ *et* $g : [1;+\infty[\to IR$

$x \mapsto 3x-2$

$g : [1;+\infty[\to IR$ est la restriction de f à [1 ; + ∞[; et f est le prolongement de g sur ℝ .