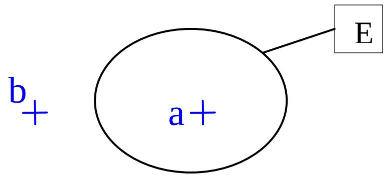
Dénombrement
Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

A) Ensemble :

Soit E un ensemble

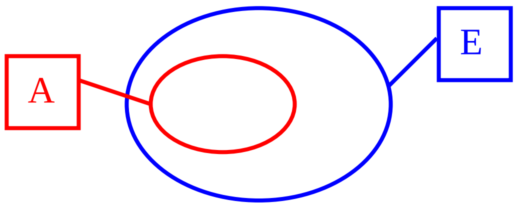
1°) Appartenance :

Si a est un élément de E, on note : a∈E ; si b n'est pas élément de E, on note b∉E.



2°) Sous-ensembles :

- A est un sous-ensemble de E si et seulement si tout élément de A est élément de E. On note : A ⊂ E (lire A inclus dans E).



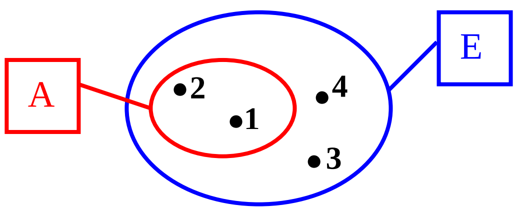
- L'ensemble constitué par tous les sous-ensembles de E se note : $\mathcal{P}$(E).

Remarque :

L'ensemble E est un sous-ensemble de lui-même et l'ensemble vide noté : Ø , qui ne contient aucun élément, est un sous-ensemble de E.

Exemple : Soit $E=\{1;2\}$ *on a* $\mathcal{P}(E) = \{E\,;\phi\,;\{\ 1\ \};\{\ 2\ \}\ \}$.

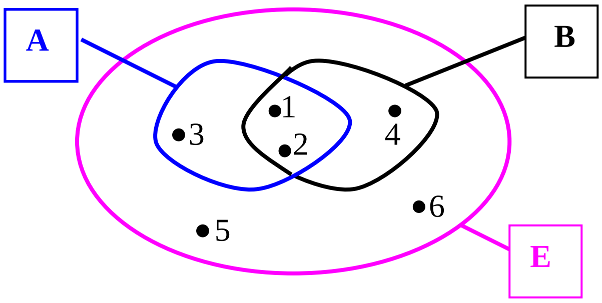
- Si A est un sous ensemble de E l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A est le complémentaire de A. On note : C_E^A ; s'il n'y a pas d'ambiguïté sur E, $\overline{A}$. (voir figure ci-dessous)



$$\overline{A}=\{3;4\}$$

3°) Intersection :

- Si A et B sont deux sous-ensembles de E l'ensemble des éléments communs à A et B est appelé intersection de A et B ; on note : A∩B (lire A *inter* B).



A∩B = $\{ x \in E;\ \ x \in A\ \ et\ \ x \in B \}$; A∩B =$\{1 ; 2\}$

– Lorsque A et B n'ont aucun élément en commun on dit qu'ils sont disjoints.
On a donc dans ce cas A∩B =Ø .

4°) Réunion :

– Si A et B sont deux sous-ensembles de E l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B est appelé réunion de A et B et noté : A∪B (lire A *union* B). A∪B = $\{ x \in E;\ \ x \in A\ \ ou\ \ x \in B \}$; A∪B =$\{1 ; 2; 3 ; 4\}$.

Remarque : (A∩B) ⊂ (A∪B).

5°) Définition : on appelle différence de A et B notée : A – B l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas dans B.

Exemple : Trouver A – B puis B – A.

6°) Propriétés Classiques :

a) La réunion et l'intersection sont commutatives

A∪B = B∪A et A∩B = B∩A .

b) La réunion et l'intersection sont associatives

(A∪B)∪C = A∪(B∪C) et (A∩B)∩C = A∩(B∩C).

c) L'intersection est distributive par rapport à l'union

A∩(B∪C) = (A∩B)∪(B∩C).

d) La réunion est distributive par rapport à l'intersection

A∪(B∩C) = (A∪B)∩(A∪C).

e) Lois de Morgan : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

f) $A \cup \overline{A} = E$ et $A \cap \overline{A} = \phi$

B) Analyse Combinatoire :

I– Ensemble fini – Cardinal : soit n un entier naturel non nul

1- Définition 1 :

Lorsque un ensemble E a n éléments, on dit que E est un ensemble fini et que son cardinal est n. On note alors Card (E) = n.

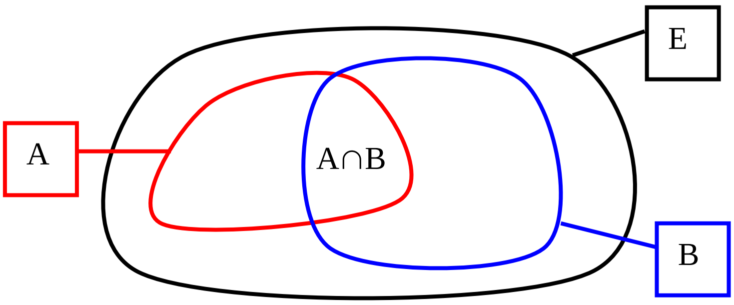
2- Exemple :

- E = { a, b, c, d, e } est un ensemble fini et card E = 5 ;
- Si E = ϕ , il comporte 0 élément et on pose card E = 0
- Certains ensembles ne sont pas finis tels que $\mathbb{N}$; $\mathbb{R}$; [0,1].

3- Cardinal d'une réunion d'ensemble finis :

Activité : Dans une classe de terminale, tous les élèves étudient au moins l'anglais ou l'allemand. 30 élèves étudient l'anglais, 20 élèves étudient l'allemand et 15 élèves étudient l'anglais et l'allemand. Quel est le nombre d'élèves de cette classe ?

Réponse : Désignons par E l'ensemble des élèves de cette classe, par A l'ensemble des élèves qui étudient l'anglais et B l'ensemble des élèves qui étudient l'allemand.



Card A = 30 ; Card B = 20 ; ; Card(A$\cap$B) = 15 et E = A$\cup$B ;
Donc Card E = card A + card B – card (A $\cap$B) = 30 + 20 – 15 = 35.

Théorème:

Soient A et B des parties d'un ensemble fini E.

Card (A$\cup$B) = Card A + Card B – Card (A$\cap$B) .

Card (C_E^A) = Card $\overline{A}$ = Card E – Card A .

Remarque: Si A et B sont disjoints alors Card (A$\cup$B) = Card A + Card B .

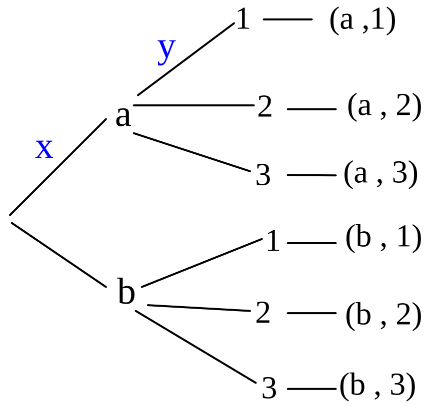
4- Produit cartésien d'ensembles finis:

a) Définition 2 : E et F sont deux ensembles finis et non vides. Le produit cartésien de E par F, noté E$\times$F, est l'ensemble des couples (x ;y) où x$\in$E et y$\in$F.

b) <u>Exemple</u>:

- Soient les ensembles $E=\{a;b\}$; $F=\{1;2;3\}$ trouver E×F, F×E.

y / x	1	2	3
a	(a,1)	(a,2)	(a,3)
b	(b,1)	(b,2)	(b,3)



E×F = $\{(a,1); (a,2) ; (a,3) ;(b,1) ; (b,2) ; (b,3)\}$

F×E = $\{(1,a); (1,b) ; (2,a) ;(2,b) ; (3,a) ; (3,b)\}$.

Il y'a deux choix possibles pour x ; x étant fixé il y'a trois choix possibles pour y.
Il en résulte qu'il y'a 6 couples (x ; y).

c)<u>Théorème</u> : Si E et F sont deux ensembles finis tels que card E = p et card F = n alors E×F est un ensemble fini et card (E×F) = n p.
Si E = F, alors card (E×E) = card (E^2) = $(\text{card}E)^2$.

5- <u>p-listes d'éléments d'un ensemble fini</u> :

a) <u>Définition 3</u> :

Soit E un ensemble fini non vide, p un nombre entier supérieur ou égal à 1.
On appelle p-liste d'élément de E (ou p-uplets) toute liste (x_1 ; x_2 ; x_3 ; … ; x_p) de p éléments de E.
L'ensemble de ces p-listes sera noté E^p.

b) <u>Exemple 1</u> : on lance un jeton de 10F, on note la face apparue. Puis un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Quel est le nombre de résultats possibles ?

Réponse : $A=\{P;F\}$ $B=\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ *; Nombre de résultats = 2×6 = 12.*

c) <u>Exemple 2</u> :

La Bank of Africa MALI veut établir pour ses clients une carte de crédit « SESAME » dont le code est composé de quatre chiffres, tous distinct de zéro.
Quel est le nombre de carte « SESAME » qu'elle peut émettre ?

<u>Réponse</u> : Un code s'écrira $x_1x_2x_3x_4$ *où les* x_i $(1\leq i\leq 4)$ *sont les éléments de l'ensemble* $E=\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. *Il y en aura autant que de 4-listes (ou quadruplets) d'éléments de E, soit* 9^4, *donc 6 561 cartes possibles.*

Remarques :

-R_1/ Chaque cas correspond à une application d'un ensemble de 9 éléments vers un ensemble de 4 éléments.

-R_2/ Déterminer le nombre de carte revient à dénombrer le nombre de 4-listes ou de quadruplets d'éléments de E.

-R_3/ Plus généralement le nombre d'application de E_p dans E_n est : n^p .

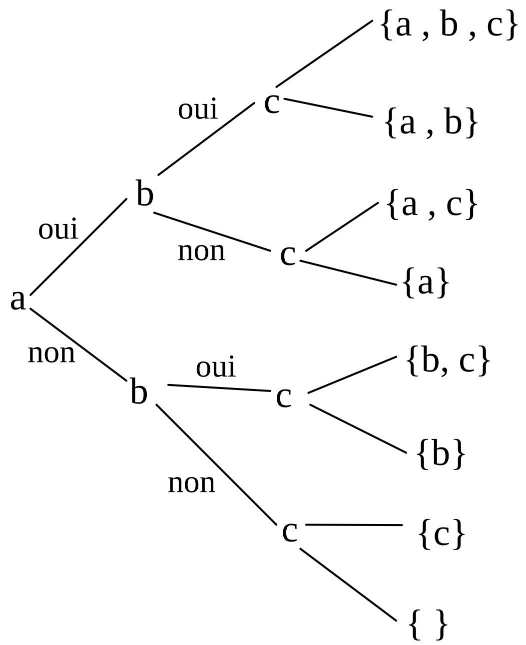
d) <u>Théorème</u> :

Soit E un ensemble à n éléments, et soit p un entier naturel non nul.

Le nombre de p-listes de E est n^p.

6- <u>Ensemble des parties d'un ensemble fini</u> :

Pour déterminer l'ensemble des parties d'un ensemble E noté P(E) on construit l'arbre des parties de E. Soit $E = \{a\ ;\ b\ ;\ c\ \}$



$\mathscr{P}(E) = \{\{a\ ;\ b\ ;c\};\ \{a;b\};\ \{a\ ;c\};\ \{a\ \};\{b;c\};\ \{b\ \};\ \{c\ \};\ \phi\ \}$

<u>Théorème</u> :

Le nombre des parties d'un ensemble à n éléments est 2^n.

7- <u>Arrangement de p éléments d'un ensemble fini</u> :

a) <u>Définition 4</u> :

Soit p un nombre entier supérieur ou égal à un. E un ensemble fini non vide.

Un arrangement de p éléments de E, est une p-liste d'éléments deux à deux distincts de E.

b) Exemple :

Une urne contient 15 boules numérotées de 1 à 15. On en tire 3, une à une, sans remise. Combien y'a-t-il de tirages possibles ?

<u>Réponse</u> : le résultat d'un tirage peut se représenter par un triplet (x_1 ; x_2 ; x_3) où

x_1 désigne le numéro de la $1^{ère}$ boule tirée ;

x_2 désigne le numéro de la $2^{ère}$ boule tirée ;

x_3 désigne le numéro de la 3ère boule tirée .
Pour x_1 il y'a 15 numéros possibles ; pour x_2 il y'a 14 numéros possibles et pour x_3 il y'a 13 numéros possibles.
Le nombre de tirage possible est donc : 15×14×13 = 2 730.

c) Théorème :

Soit E un ensemble à n éléments et p un entier tel que 1≤ p ≤ n. Le nombre d'arrangement à p éléments est noté $A_n^p = n\times(n-1)\times.........\times(n-p+1)$.

$A_{15}^3 = 15\times14\times13 = 2730$.

d) Permutation (cas particulier) :

Si n = p , on appelle permutation de E un arrangement à n éléments de E. Il y'a donc $A_n^n = n\times(n-1)\times(n-2)\times.....\times3\times2\times1$ permutations.

Cet nombre est noté : n ! (lire factorielle n).

. n ! = n ×(n-1)×(n-2)×….. ×3×2×1 et 0 ! = 1 ! = 1 *par convention* .

Par exemple on a : 5 ! = 5×4×3×2×1 = 120
10 ! = 10×9×8×7×6×5×4× 3×2×1 = 3 628 800

- Théorème :

Soit E un ensemble à n éléments. Le nombre de permutations des éléments de E est égal à n !.

- Exemple : Un parieur a sélectionné trois chevaux avec lesquels il veut composer son tiercé. De combien de façon dispose- t-il pour les classer dans l'ordre ?

Réponse : Le nombre de façon est 3 ! = 6 façons.

8- Combinaison de p éléments d'un ensemble fini :

a) Définition : Soit n un nombre entier supérieur ou égal à un, p un nombre entier compris entre zéro et n. On appelle combinaison de p éléments d'un ensemble E fini, toute partie de E ayant p éléments.

Exemple : soit E = { a ; b ; c} un ensemble à 3 éléments. Les parties de E ayant 2 éléments sont : { a ; b} ; { a ; c} ; { b ; c} .

b) Théorème :

Soit n un nombre entier supérieur ou égal à un, p un nombre entier tel que : 1≤p≤ n. Le nombre de combinaison à p éléments de E à n éléments est noté :

C_n^p *ou* $\binom{n}{p}$ et donné par la formule :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n\times(n-1)\times.......\times(n-p+1)}{p\times.............\times2\times1} \; ; \; C_n^0 = 1 \; ; \; C_n^n = 1 \; ; \; C_n^1 = n$$

Exemples : Calculer C_8^2 et C_{50}^3

$C_8^2 = \frac{8\times7}{2\times1} = 28$; $C_{50}^3 = \frac{50\times49\times48}{3\times2\times1} = 19600$.

$C_n^0 = 1$ signifie : il y a en effet une seule partie vide ;

$C_n^1 = n$ signifie : il y a en effet n singleton dans un ensemble à n éléments ;

$C_n^n = 1$ signifie : il y a en effet une seule partie pleine.

9- Pour s'y retrouver dans les différents tirages :

Tirages	Successifs (l'ordre compte)	Simultanés (l'ordre ne compte pas)
Avec remise	n^p p-listes	
Sans remise	A_n^p Arrangements	C_n^p Combinaisons

Exercices :

Un sac contient 9 jetons numérotés : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9.

a) On tire 3 jetons successivement, en remettant à chaque fois le jeton tiré dans le sac avant de tirer le suivant. On écrit côte à côte chacun des 3 chiffres tirés, dans l'ordre du tirage, formant ainsi un nombre de 3 chiffres. Combien peut-on obtenir de résultats différents ?. Exemples de résultats : 232 ; 551 ; 333 ; 124 ; 421…

Réponse : Il s'agit de triplets (3-listes) ; leur nombre est : $9^3 = 729$.

b) On procède au tirage de 3 jetons successivement, mais sans remise. On place les jetons côte à côte dans l'ordre du tirage. Combien de peut-on former ainsi de nombres de 3 chiffres ?. Exemples de résultats : 235 ; 541 ; 145 ; …

Réponse : Il s'agit d'arrangements $A_n^p = 9\times8\times7 = 504$.

c) On procède au tirage de 3 jetons simultanément. Combien peut-on obtenir de résultats différents ?. Exemple de résultats : { 2 ; 3 ; 5} ; { 4 ; 5 ; 8} …

Réponse : Il s'agit de combinaisons. On ne tient pas compte de l'ordre :
{ 2 ; 3 ; 5} = {3 ; 2 ; 5} = { 5 ; 3 ; 2}. Il y'a donc C_9^3 résultats possibles.

$C_9^3 = \frac{9\times8\times7}{3\times2\times1} = 84$.

II– Propriétés de A_n^p et de C_n^p :

1) Expression de A_n^p et de C_n^p à l'aide de factorielles :

En posant 0 ! = 1 on a :

. pour $1\leq p\leq n$, $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ et pour $0\leq p\leq n$, $C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$.

2) **Triangle de Pascal et propriétés des C_n^p :**

Disposons des C_n^p dans un tableau à double entrée, appelé triangle de Pascal.

n \ P	0	1	2	3	4	……
0	C_0^0	×	×	×	×	……
1	C_1^0	C_1^1	×	×	×	……
2	C_2^0	C_2^1	C_2^2	×	×	……
3	C_3^0	C_3^1	C_3^2	C_3^3	×	……
4	C_4^0	C_4^1	C_4^2	C_4^3	C_4^4	……
.	.	.	.	.	.	……

$$\boxed{C_n^p \;\rightarrow\; + \;\rightarrow\; C_n^{p+1} \;\rightarrow\; = \;\rightarrow\; C_{n+1}^{p+1}}\ .$$

Remplaçons chaque C_n^p par sa valeur on obtient :

1
1 1   Triangle de PASCAL
1 2 1
1 3 3 1   4 + 6 = 10
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

– Propriétés :

P$_1$) Pour $0 \leq p \leq n$, $C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}$;

P$_2$) Pour $0 \leq p \leq n$, $C_n^p = C_n^{n-p}$

3) Formule du binôme de Newton :

$(a + b)^1 = 1a + 1b$; $(a + b)^2 = 2a^2 + 2ab + 1b^2$; $(a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$.

Nous admettons que :

$$(a + b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p\, a^{n-p} b^p \text{ (appelé Formule du binôme de Newton)}\ .$$

Exemples :

$(x + 2)^5 = x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$.
$(x - y)^4 = 1x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + 1y^4$.