

DÉRIVÉES DE FONCTIONS NUMÉRIQUES

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

I- Fonction dérivable en un point :

1°) Nombre dérivé d'une fonction en un point :

a) **Définition :** On dit qu'une fonction f est dérivable au point d'abscisse x_0 (ou admet un nombre dérivé au point x_0) de son ensemble de définition si et seulement, si : $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A$; ($A \in \mathbb{R}$). A est noté $f'(x_0)$ et est appelé le nombre dérivé de la fonction f au point x_0 .

b) Exemples :

Etudier la dérivabilité de f en x_0 dans les cas suivants :

- $f(x) = x^2 + 2x - 1$ et $x_0 = 2$;

- $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ et $x_0 = -1$;

2°) Dérivabilité sur un intervalle:

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que f est dérivable sur l'intervalle I , si le nombre dérivé de f existe en tout point x de I .

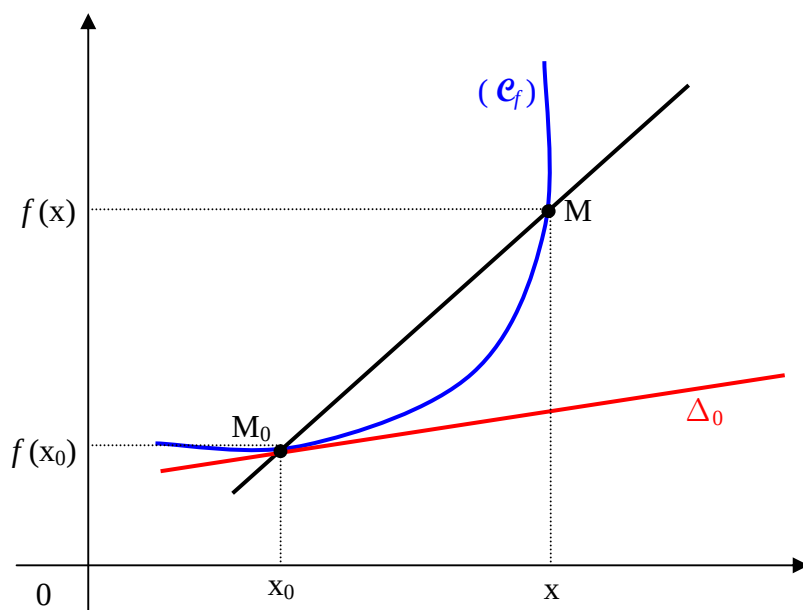
3°) Propriétés

P₁) Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.

P₂) Toute fonction rationnelle est dérivable en tout point de son ensemble de définition.

II– Interprétation géométrique du nombre dérivé :

1°) Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable au point d'abscisse x_0 de I , de représentation graphique ci-dessous :



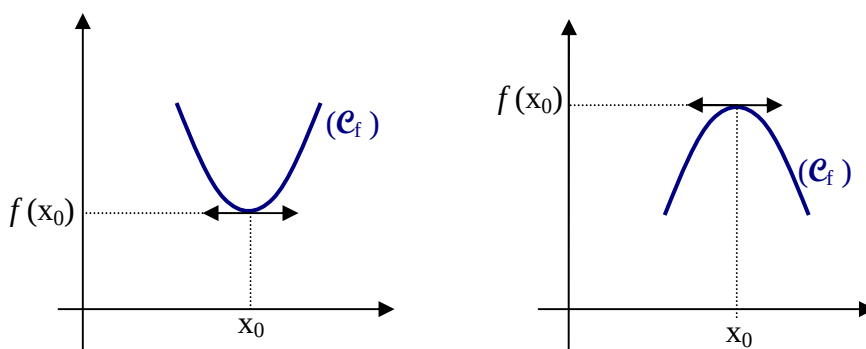
Soit $M_0(x_0; f(x_0))$ un point fixe de (C_f) . Considérons le point $M(x; f(x))$ mobile sur (C_f) . Le rapport : $r = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est le coefficient directeur de la droite (M_0M) . Lorsque M tend vers M_0 ($x \rightarrow x_0$) la droite (M_0M) tourne autour du point M_0 et tend vers une position limite qui est celle de (Δ_0) . (Δ_0) est appelé la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse x_0 de coefficient directeur ou de pente $f'(x_0)$.

2- Équation de la tangente à la courbe en un point x_0 :

L'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) de f au point d'abscisse x_0 est

$$(T) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

3- Remarque : Si le coefficient directeur $f'(x_0) = 0$, la tangente est horizontale ou parallèle à l'axe des abscisses en x_0 .



III– Fonctions dérivées d'une fonction f :

1°) Définition :

Soit f une fonction numérique définie et dérivable sur un intervalle I .

La fonction f' qui à tout x de I fait correspondre le nombre dérivé de f en x noté $f'(x)$ est appelé **fonction dérivée première de f** .

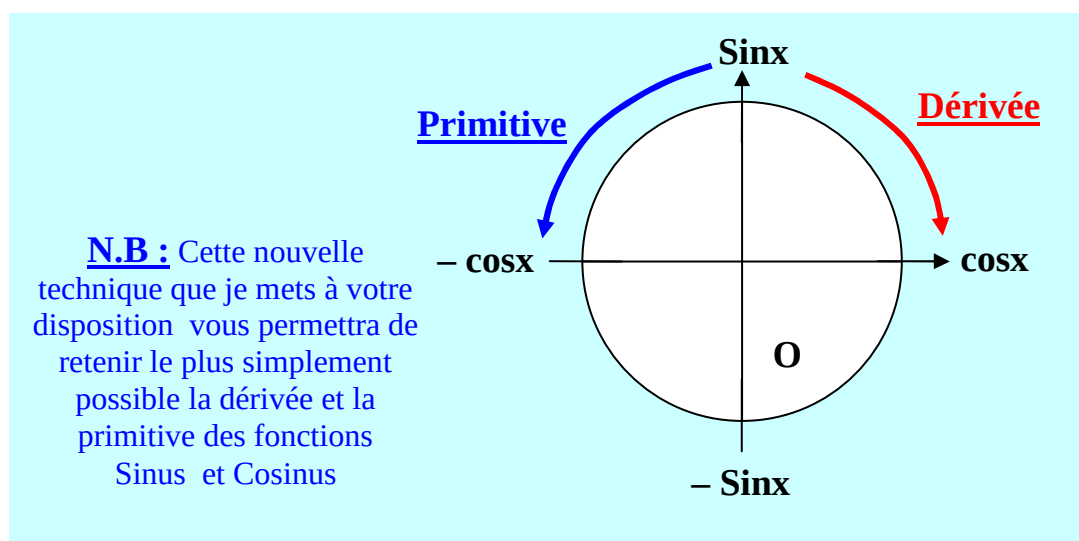
2°) Techniques de dérivation :

a) Formules de dérivation :

Soient f ; u et v des fonctions dérivables en un point x de l'intervalle I .

Fonction f définie par	Fonction dérivée f' définie par
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = ax$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = ax^n$	$f'(x) = anx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$u = f^n$	$u' = (f^n)' = n \times f^{n-1} \times f'$
$f = u + v$	$f' = (u + v)' = u' + v'$
$f = u \times v$	$f' = (u \times v)' = u'v + v'u$
$f = \frac{u}{v}$	$f' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
$f(x) = \sqrt{u(x)}$	$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$f(x) = u(ax + b)$	$f'(x) = a \times u'(ax + b)$

b) Dérivées de fonctions circulaires :



$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \sin(ax + b)$	$f'(x) = a \cos(ax + b)$
$f(x) = \cos(ax + b)$	$f'(x) = -a \sin(ax + b)$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
$f(x) = \cot g x$	$f'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot g^2 x)$

IV – Sens de variation d’une fonction :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

– Théorème :

- Si $f' \geq 0$ sur I alors f est croissante sur I ;
- Si $f' \leq 0$ sur I alors f est décroissante sur I ;
- Si $f' = 0$ sur I alors f est constante sur I ;

Exemple : Soit la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$

Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation

– 0 –

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ et $x = 3$.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	6	-26	$+\infty$

V– Extension du nombre dérivé :

1°) Nombre dérivé à droite – Nombre dérivé à gauche

Soit $f : x \mapsto f(x) = |x|$. f est-elle dérivable en $x_0 = 0$?

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1 = f'_g(0) ;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1 = f'_d(0) ;$$

- $f'_g(0) = -1$ est le nombre dérivé de f à gauche au point x_0 .
- $f'_d(0) = 1$ est le nombre dérivé de f à droite au point x_0 .

Puisque $f'_g(x_0) \neq f'_d(x_0)$ alors on dit que f n'est pas dérivable au point x_0 .

Remarque :

Si une fonction numérique f admet au point x_0 un même nombre dérivé à gauche et à droite $f'(x_0)$. On dit que la fonction f est dérivable en x_0 .

2°) Dérivée de la composée de deux fonctions et de la bijection réciproque :

$$\bullet \quad (g \circ f)' = f' [g'(f)] \quad \bullet \quad (f^{-1})'(a) = \frac{1}{f' [f^{-1}(a)]} \bullet$$

3°) Dérivabilité et continuité :**a) Théorème 6 : (admis)**

Si une fonction numérique f est dérivable en un point, alors elle est continue en ce point. Par contre, toute fonction continue en un point n'est pas nécessairement dérivable en ce point.

b) Exemple :

$f : x \mapsto f(x) = |x|$ est continue en $x = 0$, mais pas dérivable en $x = 0$.

4°) Dérivées successives :

Soit f la fonction définie par $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 3x + 7$

$$f'(x) = 12x^2 - 10x + 3 ; f''(x) = 24x - 10 ; f'''(x) = 24 ;$$

$$f^{(4)}(x) = \dots = f^{(n)}(x) = 0.$$

Les fonctions $f' ; f'' ; \dots ; f^{(n)}$ sont les fonctions dérivées successives de f .