FONCTIONS POLYNOMES – RATIONNELLES

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

I– Transformation de $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$

1–Fonction polynôme du second degré :

Définition : Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. On dit que f une fonction polynôme du second degré s'il existe 3 réels a ; b ; c $(a \neq 0)$ tels que $f(x) = ax^2 + bx + c$.

L'expression $ax^2 + bx + c$ est un polynôme du second degré.

Exemples : $g : IR \to IR$

$$x \mapsto g(x) = 2x^2 - 3x + 1$$

g est une fonction polynôme de degré 2 ; on écrit : $d^\circ g = 2$

2– Forme canonique d'un polynôme du second degré :

Soit $ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré $(a \neq 0)$;

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Leftrightarrow$$

$$f(x) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] \Leftrightarrow$$

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \Leftrightarrow$$

$$. \quad f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \quad .$$

Cette dernière écriture de $f(x)$ est appelée forme canonique du polynôme.

– Exemple1 : mettre sous forme canonique $f(t) = -2t^2 + 4t + 3$.

$$f(t) = -2t^2 + 4t + 3 \Leftrightarrow f(t) = -2(t-1)^2 + 5$$

– Exemple2 : mettre sous forme canonique $f(x) = x^2 + 3\,t + \frac{1}{2}$

$$f(x) = x^2 + 3\,t + \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x) = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{7}{4}.$$

II– Identification d'une fonction polynôme à un autre :

Soit deux fonctions polynômes f et g tels que pour tout réel x,

$f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ et

$g(x)=b_p x^p + b_{p-1}x^{p-1} + ... + b_2 x^2 + b_1 x + b_0 \quad avec \quad a_n \neq 0 \quad et \quad b_p \neq 0$

$(f=g) \Leftrightarrow \left(d^\circ f = d^\circ g\right) \Leftrightarrow (n=p)$ *et les coefficients de même rang sont identiques*

1°) Méthode pratique de la division euclidienne :

a°) Soit $f(x)=2x^4+5x^3+7x^2+7x+3 \quad et \quad g(x)=x^2+2x+1$

Trouver le polynôme $q(x)$ tel que : $f(x)=g(x)\times q(x)$.

$-0-$

$$
\begin{array}{r|l}
2x^4+5x^3+7x^2+7x+3 & x^2+2x+1 \\ \cline{2-2}
-2x^4-4x^3-2x^2 & \\ \cline{1-1}
0+x^3+5x^2+7x & 2x^2+x+3 \\
-x^3-2x^2-x & \\ \cline{1-1}
0+3x^2+6x+3 & \\
-3x^2-6x-3 & \\ \cline{1-1}
0\quad 0\quad 0 &
\end{array}
$$

$f(x)=\left(x^2+2x+1\right)\left(2x^2+x+3\right) \quad d'où \quad q(x)=2x^2+x+3$.

b°) Soit $h(x)=x^3-4x^2+8x-4 \quad et \quad p(x)=x^2-2x+1$.

Trouver les polynômes $q(x) \quad et \quad R(x) \quad tels\ que \quad h(x)=p(x)\times q(x)+R(x)$.

Réponse : La division nous donne $h(x)=(x^2-2x+1)(x-2)+(3x-2)$.

2°) Méthode des coefficients indéterminés :

Soit $f(x)=2x^4+5x^3+7x^2+7x+3 \quad et \quad g(x)=x^2+2x+1$.

Trouver le polynôme $q(x)$ tel que : $f(x)=g(x)\times q(x)$.

$f(x)=g(x)\times q(x) \Rightarrow \ comme \quad d^\circ f = 4 \ \ et \ \ d^\circ g = 2 \quad alors \quad d^\circ q = 2$.

Posons q(x)= $ax^2 + bx + c$; $f(x) = g(x) \times q(x)$

$$\Leftrightarrow f(x) = \left(x^2 + 2x + 1\right)\left(ax^2 + bx + c\right)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = ax^4 + (2a+b)x^3 + (a+2b+c)x^2 + (b-2c)x + c.$$

Par identification à $f(x)$ on a :

$$\begin{cases} a = 2 \\ 2a + b = 5 \\ a + 2b + c = 7 \\ b - 2c = 7 \\ c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = 3 \end{cases} \quad d'où \quad q(x) = 2x^2 + x + 3.$$

III– Factorisation d’un polynôme par (x – a) :

1°) Zéros d’un polynôme :

Soit f une fonction polynôme et a un réel donné.
si $f(a) = 0$ alors on dit que a *est un zéro du polynôme* $f(x)$.

2°) Théorème : Soit f une fonction polynôme et a un réel donné.
Le polynôme $f(x)$ est divisible par $x - a$ si et seulement si $f(a) = 0$.

3°) Exemples :

Soit le polynôme $f(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2$.

a) Calculer $f(1)$ *et* $f(2)$;
b) Trouver une factorisation de $f(x)$;
c) Quels sont les zéros de f et leurs ordre de multiplicité ?

Réponse :

a) $f(1) = 1 - 5 + 9 - 7 + 2 = 0$ *et* $f(2) = 16 - 40 + 36 - 14 + 2 = 0$.

b) En faisant la division euclidienne de $f(x)$ par x+1 et son quotient par x–2, on obtient : $f(x) = (x-1)(x-2)(x^2 + 2x + 1) \Leftrightarrow f(x) = (x-1)^3 (x-2)^1$.

c) 1 est un zéro de f d’ordre de multiplicité 3 ;

2 est un zéro de f d’ordre de multiplicité 1.

4°) **Méthode de Hörner :**

Soit le polynôme $f(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$. Calculer $f(2)$ et en déduire que pour tout réel x $f(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$, où a ; b ; c sont des réels à déterminer.

Réponse : $f(2) = 0$.

Coefficients	**1**	**–7**	**16**	**–12**
Zéro = 2		2	–10	+ 12
Coef Cherchés	**1**	**– 5**	**6**	**0**

D'après la méthode de Hörner, a = 1 ; b = –5 ; c = 6.

D'où $f(x) = (x-2)(x^2 - 5x + 6)$

IV – Fonctions Rationnelles :

1°) Définition :

Soient $f\,;\, g\ et\ h$ trois fonctions numériques. On appelle fonction rationnelle toute fonction numérique h telle que pour tout réel x,

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad avec \quad g(x) \neq 0.$$

2°) Exemples de décomposition en éléments simples :

a) Exemple 1: Soit $f(x) = \dfrac{3x^2 - 5x + 2}{x+3}$;

Trouver les réels a ; b et c tels que : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+3}$.

$$
\begin{array}{rrr|l}
3x^2 & -5x & +2 & x+3 \\
\cline{4-4}
-3x^2 & -9x & & 3x-14 \\
\cline{1-3}
0 & -14x & +2 & \\
 & 14x & +42 & \\
\cline{2-3}
 & 0 & +44 &
\end{array}
$$

$f(x) = 3x - 14 + \dfrac{44}{x+3}$ d'où a = 3 ; b = –14 ; c = 44

b) Exemple 2 : soit $g(x) = \dfrac{2x+1}{x(x-1)}$;

Trouver les réels a et b tels que : $g(x) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1}$

– 0 –

$$g(x) = \frac{a(x-1)+bx}{x\,(x-1)} = \frac{ax-a+bx}{x\,(x-1)} = \frac{(a+b)x-a}{x\,(x-1)} \;;$$

Par identification à $g(x)$ on a : $\begin{cases} a+b=2 \\ -a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=3 \end{cases}$

D'où $g(x) = \dfrac{-1}{x} + \dfrac{3}{x-1}$