PRIMITIVES DE FONCTIONS
Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

I– Primitives d'une fonction numérique :

1- Activité : Soit la fonction f : x $\mapsto$ 2x + 3 ;
Calculer la dérivée de chacune des fonctions F ; G ; H définies par :

$$F(x) = x^2 + 3x + 10 \;;\; G(x) = x^2 + 3x - 17 \;;\; H(x) = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + 11$$

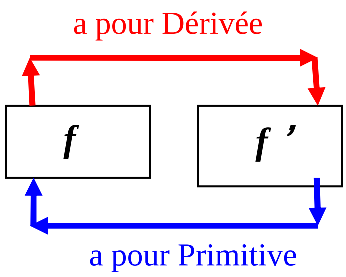
- ✓ Pour tout x de $\mathcal{D}$f , F'(x) = f (x) ; G'(x)= f (x) ; H'(x) = f (x).

On dit que F ; G ; H sont des primitives de f sur $\mathcal{D}$f.

2- Définition :
Soit f une fonction définie sur une partie non vide [a ; b] de ℝ. On appelle fonction primitive de f sur [a ; b], toute fonction F telle que : ∀ x ∊ [a ; b] , F'(x) = f (x).

3- Notations: $\underset{[a;b]}{\mathrm{Prim}}\, f = F$ *ou* $\int f(x)dx = F(x)$; .

[Prim f = F] ⇔ [∀ x ∊ [a ; b] , F'(x) = f (x)]



4- Remarques :

- Si f est continue sur [a ; b] alors sa primitive F est continue sur [a ; b] (car F est dérivable sur [a ; b]).
- Les fonctions qui à x :↦F(x) + C (C∊ℝ) sont appelées les primitives de f sur [a ; b]

5- Théorème (admis) :

a) Si F est une primitive de f sur [a ; b], toute autre primitive G de f sur [a ; b] est de la forme : G(x) = F(x) + C.
b) Si f admet de primitives sur [a ; b], il en existe une et une seule prenant au point x_0 donné une valeur y_0 donnée.

Exemple : Soit la fonction f définie par f(x)= cosx. Trouver la primitive F de f qui s'annule pour x = $\frac{\pi}{4}$ et celle qui prend la valeur 2 pour x = $\frac{3\pi}{4}$.

II- Propriétés :

Soient f et g deux fonctions définies sur [a ; b] ; F et G leurs primitives respectives sur [a ; b] .

a) Prim (f+g) = Prim (f) + Prim (g) = F + G + C^{ste}.

b) Soit α un réel, Prim (α f) = α Prim (f).

c) Prim (f '×g) = [f ×g] – Prim (f ×g')(*appelée Formule de primitivation par parties*).

Exemple : Trouver les primitives de f définie par f(x) = x sinx.

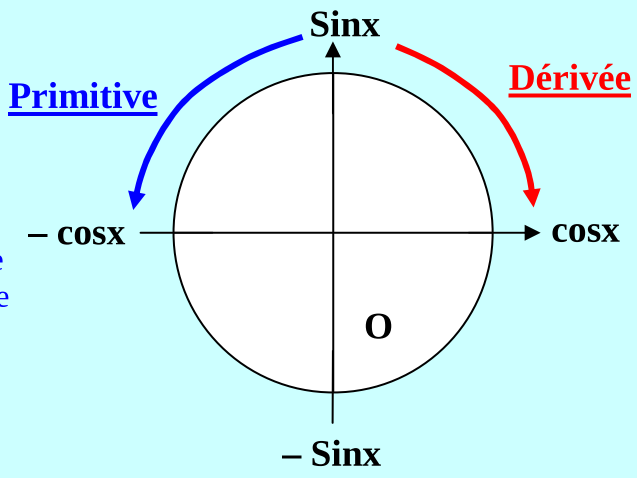
III - Calcul de Primitives :

a) Primitives de fonctions usuelles : Soients f ; u et v des fonctions numériques.

Fonctions f définies par	Fonctions Primitives F
f(x) = 0	F(x) = c
f(x) = a	F(x) = a x + c
$f(x) = a\,x^{n}$	$F(x)=\dfrac{a\,x^{n+1}}{n+1}+c$
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$	$F(x)=\dfrac{-1}{x}+c$
$f(x) = x^{r}$	$F(x)=\dfrac{x^{r+1}}{r+1}+c$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x)=2\sqrt{x}+c$
$f(x) = (x-a)^{m}$; $m \neq -1$	$F(x)=\dfrac{(x-a)^{m+1}}{m+1}+c$
$f(x) = (a\,x + b)^{m}$; $m \neq -1$	$F(x)=\dfrac{(ax+b)^{m+1}}{a(m+1)}+c$
$f(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$F(x)=\ln\lvert u(x)\rvert+c$; $u(x)\neq 0$
$f(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	$F(x)=\sqrt{u(x)}+c$; $u(x)\succ 0$
$f(x) = \dfrac{u'(x)\times v(x)-v'(x)\times u(x)}{(v(x))^2}$	$F(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}+c$; $v(x)\neq 0$
$f(x) = u'(x).u^{n}(x)$	$F(x)=\dfrac{U^{n+1}(x)}{n+1}+c$
$f(x) = \dfrac{u'(x)}{(u(x))^{n}}$	$F(x)=\dfrac{-1}{(n-1)(u(x))^{n-1}}+c$; $n\neq 1$

b) Primitives de fonction circulaires :

N.B : Cette nouvelle technique que je mets à votre disposition vous permettra de retenir le plus simplement possible la dérivée et la primitive des fonctions Sinus et Cosinus



Fonction f définies par	Fonctions Primitives F
f (x) = cosx	F(x) = sinx + c
f (x) = cos (ax + b)	F(x) = $\frac{1}{a}$ sin (ax + b) + c
f (x) = sinx	F(x) = – cosx + c
f (x) = sin (ax + b)	F(x) = $-\frac{1}{a}$ cos (ax + b) + c
f (x) = $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$	F(x) = tgx + c
f (x) = $\frac{1}{\cos^2(ax+b)}$	F(x) = $\frac{1}{a}$ tg (ax + b) + c
f (x) = $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + ctg^2 x$	F(x) = – cotgx + c
f (x) = $\frac{1}{\sin^2(ax+b)}$	F(x) = $-\frac{1}{a}\cot g(ax+b)+c$