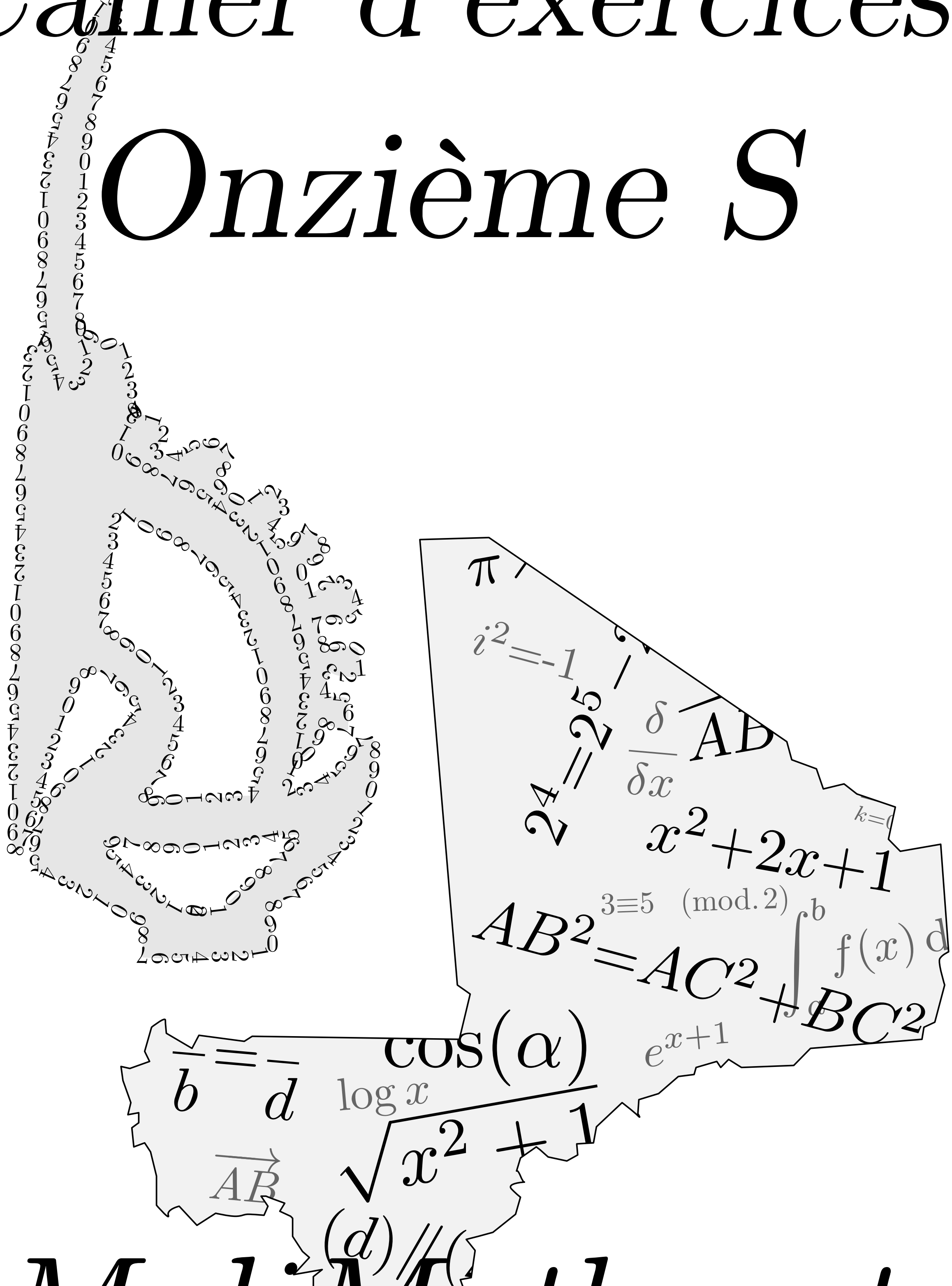
Cahier d'exercices

Onzième S



MaliMath.net

Onzième S

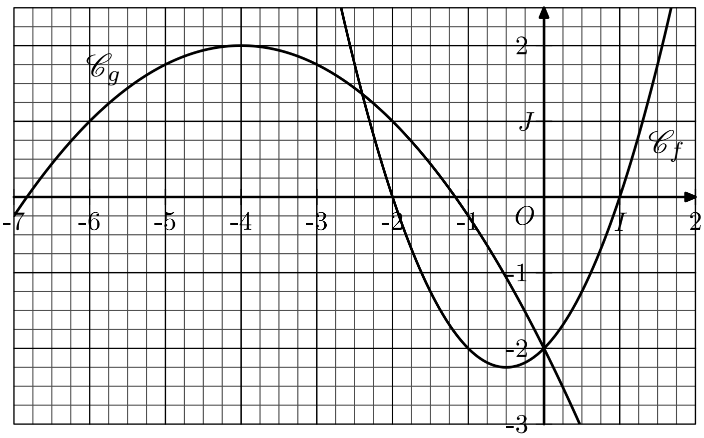
Sommaire :

A. Applications:

Exercice A.1

Dans le plan muni d'un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$, on considère les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives des fonctions f et g définies par :

$$f(x) = x^2+x-2 \quad ; \quad g(x) = -\frac{1}{4}\cdot x^2 - 2\cdot x - 2$$



Les questions ci-dessous doivent être traitées algébriquement :

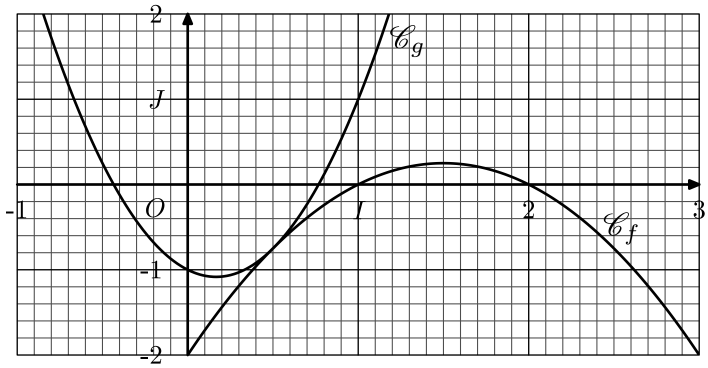
1. Déterminer les antécédents de 0 par les fonctions f et g.
2. a. Déterminer les coordonnées des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
   b. En déduire la position relative de ces deux courbes.

Exercice A.2

On considère les deux fonctions f et g dont les images d'un nombre x sont définies par les relations :

$f(x) = -x^2+3x-2 \quad ; \quad g(x) = 3x^2-x-1$

Dans le repère $\big(O\,;I\,;J\big)$, on donne les représentations graphiques $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ respectivement des fonctions f et g :



1. Géométriquement, donner les antécédents du nombre 0 par la fonction f.

Les questions suivantes se traiteront algébriquement :

2. Déterminer les antécédents du nombre 0 par la fonction g.
3. a. Résoudre l'équation :
   $f(x) = g(x)$
   b. Déterminer l'ensemble des coordonnées des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

B. Fonctions polynômes:

Exercice B.1

Pour chacune des égalités suivantes, donner la valeur de α *(sans justification)*, puis vérifier l'égalité proposée :

a. $(x+2)^2-5 = x^2+\alpha\cdot x-1$
b. $(x-3)^2+7 = x^2-6x+\alpha$
c. $2(x+1)^2-9 = \alpha\cdot x^2+4x-7$
d. $7(x-2)^2+1 = 7x^2+\alpha\cdot x+29$
e. $(x-5)^2+\alpha = x^2-10x+10$
f. $3(x+\alpha)^2+4 = 3x^2+48x+196$

Exercice B.2

Associer à chacun des polynômes du second degré sa forme canonique :

a. $(x+2)^2-5$	1. $4x^2+8x+7$
b. $(x-4)^2-4$	2. x^2+4x-1
c. $4(x+1)^2+3$	3. $x^2-8x+20$
d. $4(x-2)^2-10$	4. $4x^2-16x+6$
e. $(x-4)^2+4$	5. $-4x^2-16x-12$
f. $-4(x-2)^{+}4$	6. $x^2-8x+12$
g. $-4(x+2)^2+2$	7. $-4x^2+16x-12$

Exercice B.3

Soit a, b, c trois réels non-nuls avec $a \neq 0$. Développer l'expression suivante :

$$a\Big(x+\frac{b}{2a}\Big)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

Exercice B.4

Etablir les égalités suivantes :

a. $(x+2)^2-4=x^2+4x$

b. $(x-9)^2+11=x^2-18x+82$

d. $(x+3)^2-12=x^2+6x-3$

e. $2(x+1)^2+4=2x^2+4x+6$

Exercice B.5

Déterminer la forme canonique de chacun des polynômes du second degré suivants :

a. x^2+2x-3 b. x^2-6x-2

c. $x^2+12x+5$ d. $x^2-10x+5$

e. x^2+4x f. $x^2-14x+9$

Exercice B.6

Déterminer la forme canonique de chacun des polynômes du second degré suivants :

a. x^2+4x-5 b. x^2-2x-1

c. x^2+x+1 d. $x^2+\dfrac{1}{4}x+1$

e. $2x^2+12x-4$ f. $7x^2-14x+10$

Exercice B.7

1. a. Déterminer la forme canonique de l'expression : $x^2-10x-2$

   b. Justifier que cette expression admet pour valeur minimale -27 et que cette valeur est atteinte en 5.

2. On considère l'expression $-2x^2+8x+1$:

   a. Etablir l'égalité suivante :
   $-2x^2+8x+1=-2(x-2)^2+9$

   b. En déduire que cette expression atteint son maximum en $x=2$. Quelle est sa valeur maximale ?

Exercice B.8

1. On considère le polynôme $x^2-6x+12$:

   a. Déterminer la forme canonique de ce polynôme.

   b. Justifier que ce polynôme est strictement positif pour toute valeur de x.

2. On considère le polynôme $4x^2+40x+84$.

   a. Déterminer la forme canonique de ce polynôme.

   b. Justifier que -16 est la valeur minimale prise par ce polynôme sur $\mathbb{R}$.

Exercice B.9

Chacun de ses polynômes admettent au moins une racine parmi l'ensemble suivant :
$\{-2\,;-1\,;1\,;2\}$

Utiliser ce renseignement pour effectuer "*rapidement*" la factorisation de chacun des polynômes suivants :

a. x^2+2x-8 b. $2x^2-4x-6$

c. x^2+x-6 d. $3x^2-4x+1$

e. x^3+x^2-2x f. $5x^2+3x-2$

Exercice B.10

1. On considère la fonction f définie par :
   $f(x)=a{\cdot}x^2+3x+2$ où $a\in\mathbb{R}$

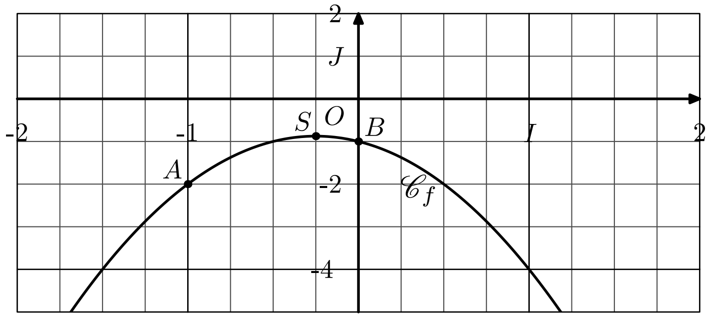
   Sachant que sa courbe représentative passe par le point de coordonnées $A\big(-2\,;-12\big)$, déterminer l'expression complète de la fonction f.

2. Soit g la fonction dont l'image d'un nombre réel x est définie par :
   $g(x)=3x^2+b{\cdot}x+1$ où $b\in\mathbb{R}$

   Sachant que le sommet de la parabole représentative de la fonction g a pour abscisse 1, déterminer l'expression complète de la fonction g.

Exercice B.11

La courbe $\mathscr{C}_f$ est une parabole représentant une fonction f du second degré.



La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par les points $A\big(-1\,;-2\big)$, $B\big(0\,;-1\big)$ et admet pour sommet le point S dont l'abscisse est $-\dfrac{1}{4}$.

La fonction f étant définie par un polynôme du second degré, on en déduit l'existence de trois réels a, b et c tels que :
$f(x)=a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c$

1. A l'aide des coordonnées du point B, déterminer la valeur du nombre c.

2. En utilisant les caractéristiques du sommet S de la parabole, justifier que la fonction f admet l'écriture :
   $f(x)=2b{\cdot}x^2+bx-1$

3. A l'aide des coordonnées du point A, déterminer l'ex-

pression complète de la fonction f.

Exercice B.12

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à l'aide d'un polynome du second degré dont le coefficient du terme du second degré est strictement négatif.

Sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est une parabole dont le sommet a pour coordonnée $\left(\frac{1}{4};-\frac{7}{8}\right)$.

1. a. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

   b. En déduire le signe du discriminant du polynôme du second degré définissant la fonction f.

2. La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par les points :
   $A(0;-1)$ et $B(-2;-11)$

   Déterminer les réels a, b et c vérifiant l'égalité :
   $f(x) = a{\cdot}x^2 + b{\cdot}x + c$

Exercice B.13

1. Dresser le tableau de variations des fonctions suivantes :

   a. $f(x) = x^2 + x - 2$ b. $g(x) = -2x^2 + 4x - 3$

   c. $h(x) = -4x^2 + x + 2$ d. $j(x) = 2x^2 + 2x + 2$

2. Pour chaque fonction de la question précédente, donner, sans préciser leurs valeurs, le nombre d'antécédent de 0.

Exercice B.14

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ définies par les relations :

$$f(x) = x^2 + x + 1 \quad ; \quad g(x) = -2x^2 - 3x + 5$$

1. Etablir le tableau de variation de chacune de ces fonctions.

2. Etablir le tableau de signe de chacune de ces fonctions.

Exercice B.15

1. On considère la fonction f dont l'image d'un nombre réel x est définie par :
   $f(x) = 2x^2 + 3x + 2$

   a. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

   b. Justifier que la fonction f n'admet aucun antécédent du nombre 0.

2. Soit g la fonction définie par la relation :
   $g(x) = -x^2 + 2x + 3$

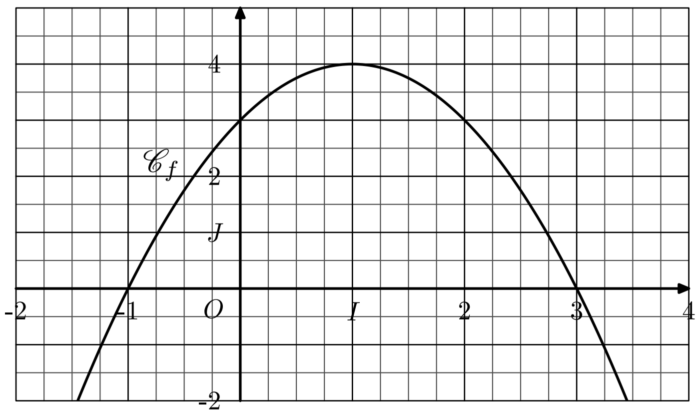
   a. Déterminer l'ensemble des antécédents du nombre 0 par la fonction g.

   b. Dresser le tableau de variation de la fonction g *(on y apportera les résultats de la question précédente)*.

   c. En déduire le tableau de signe de la fonction g.

Exercice B.16

On considère la fonction f dont la représentation est donnée ci-dessous dans le repère orthonormal $(O;I;J)$:



On s'intéresse à la fonction affine g définie par la relation :
$g : x \longmapsto x + 1$

1. Tracer la courbe représentative de la fonction g dans le repère ci-dessus.

2. Graphiquement, résoudre l'équation : $f(x) = g(x)$.

3. Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) \geqslant g(x)$

Exercice B.17

1. Etablir l'égalité suivante :

$(-2x^2 + 4x - 2)(a{\cdot}x^2 + b{\cdot}x + c)$
$= -2a{\cdot}x^4 + (4a-2b)x^3 + (-2c+4b-2a)x^2 + (4c-2b)x - 2c$

2. Donner, sans justification, les valeurs de a, b, c réalisant l'égalité suivante :
   $(-2x^2 + 4x - 2)(a{\cdot}x^2 + b{\cdot}x + c)$
   $= -18x^4 + 18x^3 + 14x^2 - 10x - 4$

3. Dresser le tableau de signe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $-18x^4 + 18x^3 + 14x^2 - 10x - 4$

Exercice B.18

Sans justification, répondre aux questions suivantes :

1. Résoudre l'inéquation : $x^3 > 8$

2. Résoudre l'inéquation : $x^3 \leqslant 27$

Exercice B.19

On considère la fonction f définie par la relation :
$f(x) = 2(5 - x)^3 + 1$

Etablir que la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice B.20

Soit f la fonction définie par la relation :
$f(x) = -x^3 + 2$

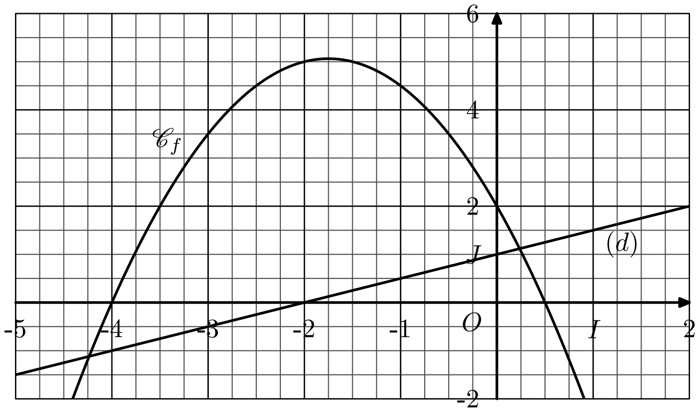
1. Résoudre l'équation : $f(x) = 10$

2. Etablir que la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$

Exercice B.21

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$f(x) = -x^2 - \frac{7}{2}x + 2$

Dans le plan munit d'un repère $(O;I;J)$ orthonormé, est donnée la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f.



La droite (d) admet l'équation : $\quad y = \dfrac{1}{2}\cdot x + 1$

1. a. Déterminer les solutions de l'équation :
   $f(x) = 0$

   b. En déduire les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

2. a. Déterminer l'ensemble des solutions :
   $f(x) = g(x)$

   b. En déduire les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$

Exercice B.22

On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par les relations :

$$f(x) = 2x^3 - 10x^2 + 6x + 12 \quad ; \quad g(x) = 2x - 4$$

On considère $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g.

1. Montrer que 2 est solution de l'équation : $\quad f(x) = g(x)$.

2. a. Déterminer la valeur des réels a, b, c vérifiant :
   $f(x) - g(x) = (x-2)\big(a\cdot x^2 + b\cdot x + c\big)$

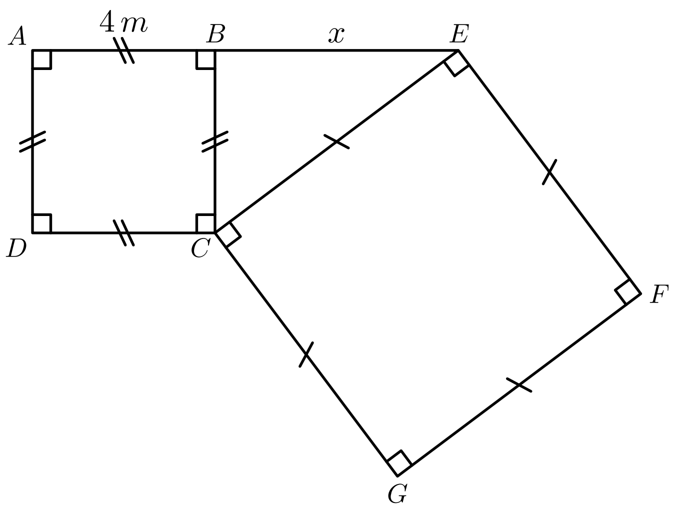
   b. En déduire la forme factorisée de l'expression :
   $f(x) - g(x)$.

3. a. Dresser le tableau de signe de la différence :
   $f(x) - g(x)$

   b. En déduire la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice B.23

Un champ est composé de deux carrés et d'un triangle rectangle. On a représenté ce champ dans la figure ci-dessous :

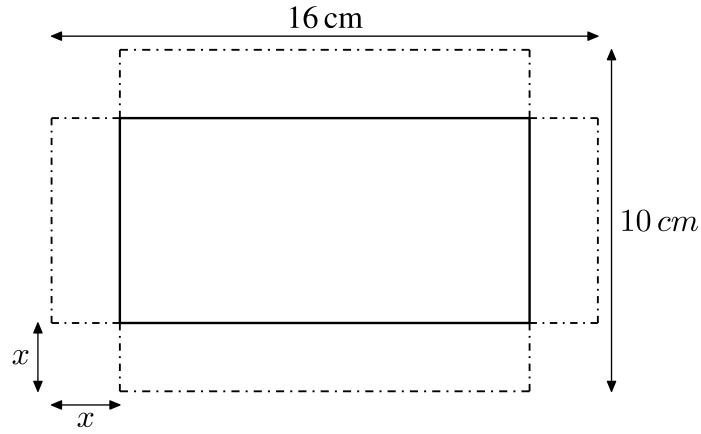


1. Justifier que l'aire $\mathcal{A}$ du champ a pour valeur en fonction de x :
   $\mathcal{A}(x) = x^2 + 2x + 32$

2. En déduire la valeur de la longueur x afin que l'aire totale du champ soit de $200\,m^2$.

Exercice B.24

On veut réaliser, dans le patron ci-dessous une boîte rectangulaire sans couvercle. Les longueurs sont exprimées en cm.



1. a. Lorsque la boîte sera construire, le nombre x représentera quelle dimension ? La longueur, la largeur ou la hauteur ?

   b. Quelles valeurs peut prendre la variable x dans ce problème ?

   c. Donner l'expression du volume $\mathscr{V}$ en fonction de la valeur de x.

2. Dans cette question, nous cherchons pour quelles valeurs de "x", cette boîte possède un volume égal à $144\,cm^3$:

   a. Etablir l'égalité suivante :
   $4x^3 - 52x^2 + 160x - 144 = (2x-4)(2x^2 - 22x + 36)$

   b. En déduire les valeurs de x pour lesquelles $\mathscr{V}(x)$ a pour valeur 144.

Exercice B.25

Soit f et g deux fonctions définies sur $\big]-\infty\,;3\big]$ par les relations :

$$f(x) = \sqrt{-x+3} \quad ; \quad g(x) = x - 1$$

1. a. Résoudre l'équation :
   $-x + 3 = (x-1)^2$

   b. Vérifier si les deux solutions trouvées à la question a. sont solutions de l'équation :
   $f(x) = g(x)$

2. a. Sur $\big]-\infty\,;3\big]$, établir que la fonction f est décroissante .

   b. Justifier que la fonction g est croissante.

3. En déduire la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Exercice B.26

On considère les deux fonctions f et g définies sur $\big]-2\,;+\infty\big[$ par les relations :

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+1} \quad ; \quad g(x) = \frac{3x-3}{2x+4}$$

1. a. Etablir l'égalité suivante :

$$f(x)-g(x)=\frac{-3x^3+5x^2-x-1}{(x^2+1)(2x+4)}$$

b. Déterminer la valeur des réels a, b et c vérifiant la relation suivante :

$$f(x)-g(x)=\frac{(x-1)\big(a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c\big)}{(x^2+1)(2x+4)}$$

2. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation :
$f(x)-g(x)=0$

3. a. Dresser le tableau de signe de : $f(x)-g(x)$.
(on admettra que le produit $(x^2+1)(2x+4)$ est strictement positif sur $\big]-2\,;+\infty\big[$).

b. En déduire la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $\big]-2\,;+\infty\big[$.

Exercice B.27

1. Soit f la fonction définie par la relation :
$f(x)=\sqrt{-2x^3+2}$
Justifier que la fonction est décroissante sur $\big]-\infty\,;1\big]$.

2. Soit g la fonction définie par la relation :
$g(x)=-\Big(\dfrac{2}{x+1}\Big)^3$ Justifier que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $\big]-1\,;+\infty\big[$.

Exercice B.28

On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :

$$f(x)=\frac{-x-3}{2x^2-3}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

2. Soit g la fonction affine définie par la relation :
$g(x)=x+3$

a. Déterminer la valeur des réels a, b et c vérifiant l'égalité suivante :

$$f(x)-g(x)=\frac{(1-x)(ax^2+bx+c)}{2x^2-3}$$

b. En déduire la forme factorisée de $f(x)-g(x)$.

3. a. Dresser le tableau de signe de $f(x)-g(x)$ sur l'intervalle $\Big]-\sqrt{\dfrac{3}{2}}\,;\sqrt{\dfrac{3}{2}}\Big[$.
On admettra que l'expression $2x^2-3$ est négative sur $\Big]-\sqrt{\dfrac{3}{2}}\,;\sqrt{\dfrac{3}{2}}\Big[$.

b. En déduire la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $\Big]-\sqrt{\dfrac{3}{2}}\,;\sqrt{\dfrac{3}{2}}\Big[$.

Exercice B.29

On considère le polynôme du second degré (E) : x^2+3x+3.

1. Déterminer le discriminant du polynôme (E).

2. En effectuant un raisonnement par l'absurde et en Supposant que l'expression (E) admette la forme factorisée :
(E) : $a(x-\alpha)(x-\beta)$
Etablir que l'expression (E) n'admet pas de forme factorisée.

Exercice B.30

Factoriser, si possible, les expressions suivantes :

a. x^2+4x+3 b. $5x^2-4x-1$ c. $3x^2+4x+1$

d. $4x^2+3x+4$ e. x^2+4x+1 f. $3x^2+3x+4$

Exercice B.31

Factoriser, si possible, les polynômes du second degré ci-dessous :

a. $3x^2+4x+1$ b. $-3x^2+4x-1$ c. $-4x^2+5x$

d. x^2+2x-1 e. $-x^2+4x+1$ f. $3x^2-4x+2$

Exercice B.32

Factoriser les expressions suivantes :

a. $2x^2+3x+1$ b. $4x^2+9x+2$ c. $-3x^2+2x-1$

d. $8x^2-24x+18$ e. $4x^2+8x-4$ f. $-4x^2+x+3$

C. Equations-inéquations:

Exercice C.1

1. Factoriser les expressions suivantes :

a. $(3x+2)(5-x)+(6x+4)$

b. $(5-2x)(x+1)-3x(2x-5)$

c. $(5-2x)+(4x-10)(7-2x)$

d. $-5(3x+2)-5x(2x+1)$

2. Résoudre les équations suivantes :

a. $(4x+2)(3x-1)+x(6x+3)=0$

b. $(3x+9)^2=2(2x+6)(3x-2)$

c. $(-5x-4)(2x+1)=(-4x-3)(3x+2)$

d. $(1-5x)(2x+1)=(1-3x)(3x+2)$

3. Résoudre les équations suivantes :

a. $\dfrac{x}{3x+2}=\dfrac{5x}{2x+1}$ b. $\dfrac{4x-2}{2x-3}-\dfrac{6x-2}{3x+1}=0$

Exercice C.2

Résoudre les équations suivantes :

a. $(9-3x)(5+2x)+(x-3)(5+x)=0$

b. $\dfrac{2x-3}{x-2}-\dfrac{x+3}{x-1}=0$

Exercice C.3

On considère l'expression : $(E) : x^2+4x-12$

1. Factoriser l'expression : $(x+2)^2-16$.
2. a. Donner la forme canonique de l'expression (E).
   b. En déduire la forme factorisée de l'expression (E).
3. Résoudre l'équation suivante : $x^2+4x-12=0$

Exercice C.4

On condisère l'expression : $(E) : x^2+3x+10$

1. Déterminer l'expression de la forme canonique de (E).
2. Déduire de la forme canonique de (E) que l'équation ci-dessous n'admet pas de solution :
   $x^2+3x+10=0$

Exercice C.5

Déterminer le discrimant des polynômes du second degré ci-dessous :

a. x^2+2x+4 b. $2x^2+4x+1$ c. x^2-2x+1

d. $-2x^2+2x+1$ e. x^2-1-1 f. $3x^2+x-2$

Exercice C.6

Résoudre les équations suivantes :

a. $x^2+2x-35=0$ b. $2x^2-5x+2=0$

c. $5x^2-3x+2=0$ d. $9x^2-24x+16=0$

e. $-2x^2+3x-5=0$ f. $-3x^2-x+4=0$

Exercice C.7

Résoudre les équations suivantes :

a. $x^2-4x-3=0$ b. $2x^2-3x-2=0$

c. $2x^2-4x-8=0$ d. $x^2-3x+1=0$

Exercice C.8

Résoudre les équations suivantes :

a. $3x^2+4x+1=0$ b. $3x^2-4x+2=0$

c. $-x^2+2x+3=0$ d. $2x^2-4x+2=0$

e. $-3x^2+3x+3=0$ f. $-x^2+4x+3=0$

Exercice C.9

Résoudre les équations suivantes :

a. $-5x^2-4x+1=0$ b. $x^2+4x-3=0$

c. $(3x-2)(2x-2)=x(2x+2)-5$

Exercice C.10

Dresser le tableau de signe de chacune des expressions suivantes :

a. $2x^2+x-1$ b. $-3x^2+2x+1$ c. $2x^2-1$

d. $-x^2-4x-1$ e. $-x^2-x-1$ f. $4x^2-3x-1$

Exercice C.11

Résoudre les inéquations suivantes :

a. $x^2-3x+2>0$ b. $x^2-x-2<0$

c. $-9x^2+12x-4\leqslant 0$ d. $5x^2+4x-1<0$

e. $-4x^2+2x+2\geqslant 0$ f. $2x^2+4x-2>0$

Exercice C.12

Résoudre les inéquations suivantes :

a. $x^2+5x+4>0$ b. $-3x^2+4x+4<0$

c. $4x^2+4x+1>0$ d. $-2x^2+5x+3>0$

e. $4x^2-3x+2\leqslant 0$ f. $2x^2+12x+4\geqslant 0$

Exercice C.13

Résoudre les équations suivantes :

a. $3x^2+4x+1=0$ b. $3x^2-4x+2=0$

c. $-x^2+2x+3=0$ d. $2x^2-4x+2=0$

e. $-3x^2+3x+3=0$ f. $-x^2+4x+3=0$

Exercice C.14

Résoudre les inéquations suivantes :

a. $2x^2+3x-5>0$ b. $-x^2+5x-4\leqslant 0$

c. $(-4x^2+x+5)(3-2x)\geqslant 0$

Exercice C.15

Factoriser, si possible, les polynômes du second degré ci-dessous :

a. $3x^2+4x+1$ b. $-3x^2+4x-1$ c. $-4x^2+5x$

d. x^2+2x-1 e. $-x^2+4x+1$ f. $3x^2-4x+2$

Exercice C.16

Déterminer le tableau de signe des expressions suivantes sur $\mathbb{R}$:

a. x^2+2x-2 b. $(2x+1)(3x^2-2x-1)$

D. Trigonométrie:

Exercice D.1

1. Résoudre dans l'intervalle $\left]-\pi\,;\pi\right]$ des mesures principales les équations suivantes :

   a. $2\sin 2x = 1$ b. $\cos 3x = 1$

2. Résoudre dans l'intervalle $\left]-\pi\,;\pi\right]$ des mesures principales les équations suivantes :

   a. $\sin 2x = \sin x$ b. $\cos 2x = \cos x$

Exercice D.2

En s'aidant d'une représentation graphique du cercle trigonométrique, déterminer l'ensemble des solutions dans l'intervalle $\left]-\pi\,;\pi\right]$ des mesures principales les inéquations suivantes :

a. $\cos x \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ b. $2\sin x \leqslant 1$ c. $\cos x < -\dfrac{1}{2}$

Exercice D.3

Simplifier l'argument de chacune des expressions suivantes :

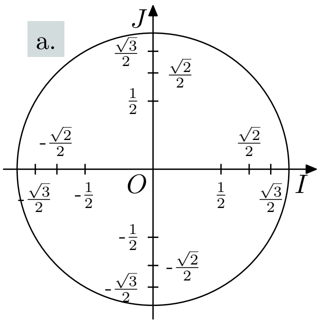
a. $\tan\left(x+\pi\right)$ b. $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$ c. $\cos\left(x-\pi\right)$

d. $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$ e. $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ f. $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$

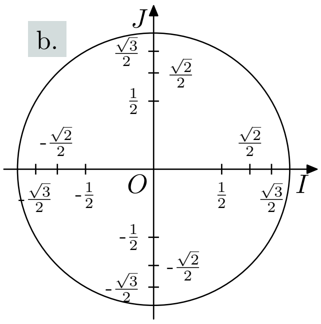
Exercice D.4

Ci-dessous sont représentés deux cercles trigonométriques où sont indiqués sur les axes des valeurs remarquables :

a.



b.



1. Sur l'axe des abscisses, représenter les ensembles des nombres définis par les images d'intervalles suivants :

   a. $\cos\left(\left[\dfrac{\pi}{4}\,;\dfrac{5\pi}{6}\right]\right)$ b. $\cos\left(\left[-\dfrac{\pi}{4}\,;\dfrac{2\pi}{3}\right]\right)$

2. Sur l'axe des abscisses, représenter les ensembles des nombres définis par les images d'intervalles suivants :

   a. $\sin\left(\left[\dfrac{\pi}{4}\,;\dfrac{5\pi}{6}\right]\right)$ b. $\sin\left(\left[-\dfrac{\pi}{4}\,;\dfrac{2\pi}{3}\right]\right)$

Exercice D.5

Dans cet exercice, on souhaite montrer que tous les nombres de l'ensemble $E = \left\{\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2k\pi}{3} \middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$ vérifient l'équation :
$\sin 2x = \sin x$

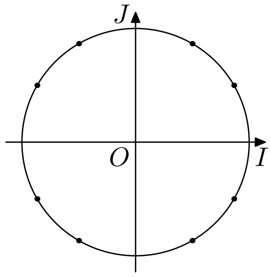
1. a. Compléter, dans le tableau ci-dessous, la valeur de α quand k parcours les valeurs proposées :

k	-2	-1	0	1	2	3	4
$\alpha = \dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2k\pi}{3}$							

   b. En se servant de la question précédente, donner la mesure principale de l'angle α en fonction de k :

k	-2	-1	0	1	2	3	4
Mesure principale de α							

   c. Placer l'ensemble des points de E sur le cercle trigonométrique ci-dessous :



2. Montrer que **tous** les éléments de E vérifient l'équation :
   $\sin 2x = \sin x$

Exercice D.6

1. Montrer que :
$$\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{5\pi}{6} = 0$$

2. Simplifier au maximum le nombre suivant. *(on exprimera le résultat à l'aide de* $\cos\dfrac{\pi}{7}$ *et* $\sin\dfrac{\pi}{7}$*).*
$$2\cdot\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right)+3\cdot\cos\frac{8\pi}{7}-2\cdot\sin\frac{6\pi}{7}+\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)$$

Exercice D.7

En s'aidant d'une représentation graphique du cercle trigonométrique, déterminer l'ensemble des solutions dans l'intervalle $\left]-\pi\,;\pi\right]$ des mesures principales les inéquations suivantes :

a. $\cos x > 0$ b. $\sin x > 0$ c. $\sin x < -\dfrac{1}{2}$

Exercice D.8

On considère l'ensemble E de nombres défini par :
$$E = \left\{\frac{\pi}{6}+k\cdot\frac{\pi}{2} \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$$

1. Donner l'ensemble de nombres formé par l'ensemble des mesures principales des angles de l'ensemble E.

2. Montrer que tous les nombres de E vérifient l'équation suivante :
$$\cos(3x) = \cos\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)$$

Exercice D.9

A l'aide des formules du cos et du sin des angles associés, exprimer en fonction de $\cos x$ ou de $\sin x$ les nombres suivants :

a. $\sin\left(3\pi+x\right)$ b. $\cos\left(\dfrac{5\pi}{2}-x\right)$

c. $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$ d. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$

e. $\sin\left(\pi-x\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$

f. $3\cdot\sin\left(\pi+x\right)-2\cdot\sin\left(\pi-x\right)+4\cdot\sin\left(x-\pi\right)$

Exercice D.10

1. A l'aide de la représentation du cercle trigonométrique :

   a. Représenter sur l'axe des abscisses l'ensemble E :
$$E = \left\{\cos x \mid x\in\left[\frac{\pi}{6}\,;\frac{2\pi}{3}\right]\right\}$$

Exprimer l'ensemble E sous forme d'un intervalle.

b. Représenter sur l'axe des ordonnnées l'ensemble F : $\left\{\sin x \mid x\in\left[\frac{2\pi}{3}\,;\,\frac{7\pi}{3}\right]\right\}$

Exprimer l'ensemble F sous forme d'un intervalle.

2. Graphiquement et en s'aidant de la représentation du cercle trigonométrique, donner l'ensemble des solutions de chacune des inéquations ci-dessous :

a. $\sin x \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$ b. $\cos x \geqslant -\frac{1}{2}$ c. $\cos x < 0$

Exercice D.11

Lorsque k décrit l'ensemble $\mathbb{Z}$, alors l'expression $\frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{\pi}{2}$ décrit un ensemble de nombre qu'on note E et qui peut s'écrire sous la forme :

$$E=\left\{\frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{\pi}{2}\;\middle|\;k\in\mathbb{Z}\right\}$$

1. Donner les mesures principales des angles représentés par cet ensemble.
2. Vérifier que chaque nombre de l'ensemble E vérifie l'équation : $\cos 2x=0$

Exercice D.12

1. Résoudre dans l'ensemble $\left]-\pi\,;\pi\right]$ des mesures principales, les équations suivantes :

a. $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ b. $\sin x=-\frac{1}{2}$

c. $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ d. $\tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ b. $\tan x=-1$

Exercice D.13

Résoudre dans l'intervalle $\left]-\pi\,;\pi\right]$ des mesures principales les équations suivantes :

a. $2\cdot\cos 2x=1$ b. $\sin 3x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

c. $\cos 2x=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ d. $\sin 3x=\cos x$

Exercice D.14

Résoudre, dans l'intervalle $\left]-\pi\,;\,\pi\right]$ les équations suivantes :

a. $2\cos 2x=1$ b. $\sin 3x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

c. $\cos 2x=\cos x$ d. $\sin 3x=\cos x$

Exercice D.15

1. a. Résoudre l'équation : $2x^2+7x+3=0$.

b. Résoudre l'équation ci-dessous dans $\left]-\pi\,;\pi\right]$:

$$\sin 2x=-\frac{1}{2}$$

2. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation :

$$2\cdot\left(\sin 2x\right)^2+7\cdot\sin 2x+3=0$$

Exercice D.16

1. Dans chacune des cas, tracer un cercle trigonométrique et représenter chacun des ensembles suivants :

a. $\left\{\cos x \mid x\in\left[\frac{\pi}{6}\,;\,\frac{2\pi}{3}\right]\right\}$

b. $\left\{\sin x \mid x\in\left[\frac{2\pi}{3}\,;\,\frac{7\pi}{3}\right]\right\}$

2. A l'aide d'un cercle trigonométrique, donner sans justification l'ensemble des solutions des inéquations suivantes dans l'intervalle $\left]-\pi\,;\pi\right]$:

a. $\sin x\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$ b. $\cos x\geqslant-\frac{1}{2}$ c. $\cos x<0$

Exercice D.17

1. En remarquant que : $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$

Déterminer les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

2. Déterminer les valeurs de : $\cos\frac{7\pi}{12}$; $\sin\frac{7\pi}{12}$

Exercice D.18

Montrer la relation suivante :

$$\sin(a+b)\cdot\cos(a-b)=\sin a\cdot\cos a+\cos b\cdot\sin b$$

Exercice D.19

Déterminer une simplification des expressions suivantes :

1. $\cos 2x\cdot\cos x-\sin 2x\cdot\sin x$
2. $\sin 3x\cdot\cos 2x-\sin 2x\cdot\cos 3x$

Exercice D.20

1. Simplifier l'expression suivante :

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

2. Etablir l'égalité suivante :

$$\frac{\sin 5x}{\sin 2x}+\frac{\sin 2x}{\sin x}=\frac{\left(\sin 3x\right)^2}{\sin(2x)\cdot\sin(x)}$$

3. Résoudre, dans l'intervalle $\left]-\pi\,;\,\pi\right]$ l'équation suivante :

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x)+\frac{1}{2}\sin(2x)=\cos\frac{\pi}{7}$$

Exercice D.21

Résoudre, dans $\left]-\pi\,;\pi\right]$, les deux équations suivantes :

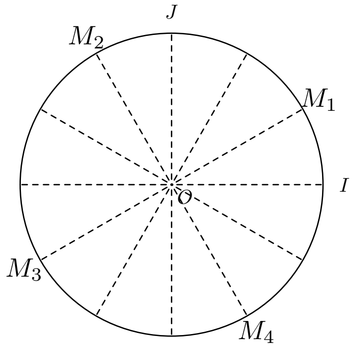
a. $\cos x=\cos\frac{\pi}{4}$ b. $\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

c. $\cos\left(2x\right)=\cos\frac{\pi}{4}$ d. $\cos x=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

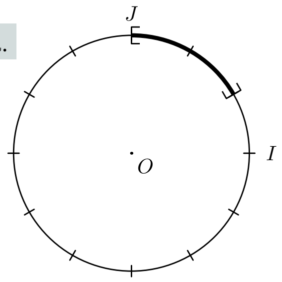
Exercice D.22

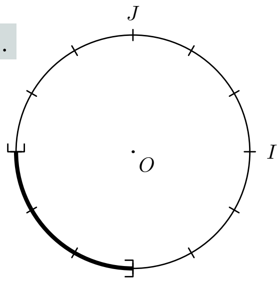
Dans l'ensemble de cet exercice, le cercle trigonométrique a été partagé en 12 parties égales.

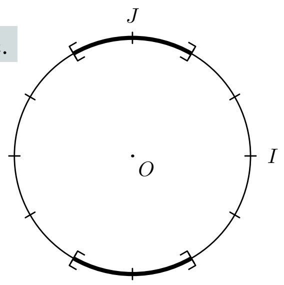
1. Déterminer la mesure, en radian, des angles $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM_i}\right)$ pour $i=1,\ldots,4$.

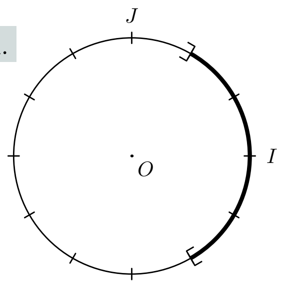


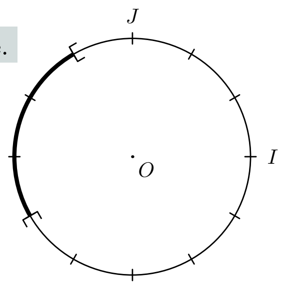
2. Pour chaque question, une partie du cercle trigonométrique a été surlignée. Ecrire, sous forme d'intervalle ou de réunion d'intervalles, l'ensemble des mesures de l'angle $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM}\right)$ lorsque M décrit chacune de ces parties :

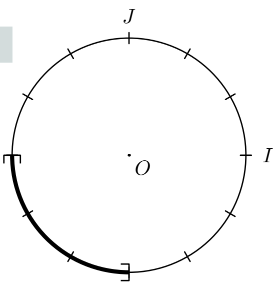
a.


b.


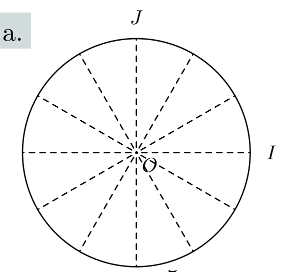
c.


d.


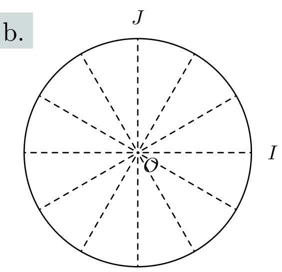
e.


f.


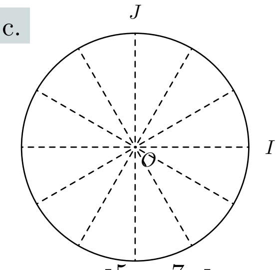
3. Pour chaque question, surligner l'ensemble des points M du cercle dont l'angle $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM}\right)$ appartient à l'intervalle indiqué :

a.


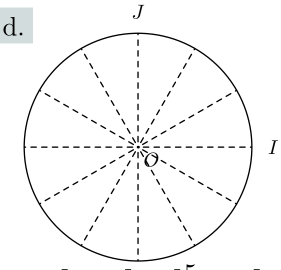
$\left[\frac{\pi}{6}\,;\,\frac{5\pi}{6}\right]$

b.


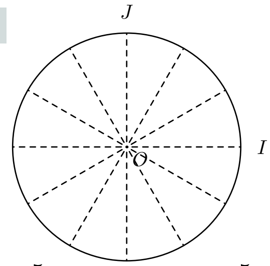
$\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,-\frac{\pi}{6}\right]$

c.


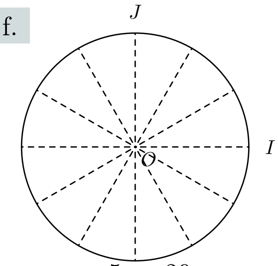
$\left[\frac{5\pi}{6}\,;\,\frac{7\pi}{6}\right]$

d.


$\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6}\,;\,\pi\right]$

e.


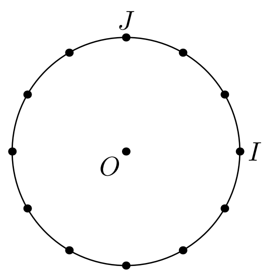
$\left[\frac{5\pi}{6}\,;\,\pi\right]\cup\left[-\pi\,;\,-\frac{5\pi}{6}\right]$

f.


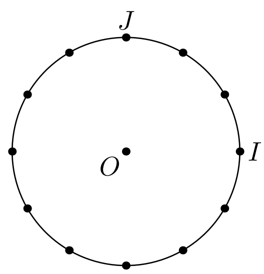
$\left[\frac{5\pi}{2}\,;\,\frac{29\pi}{6}\right]$

Exercice D.23

1. a. Pour chaque question, représenter sur le cercle l'ensemble des points repérés par un angle appartenant à l'intervalle donnée :



$I=\left[\frac{11\pi}{6}\,;\,\frac{13\pi}{6}\right]$



$J=\left[\frac{2\pi}{3}\,;\,\frac{7\pi}{3}\right]$

b. Donner l'expression de chacun de ses intervalles à l'aide de réunions d'intervalle exprimé par des mesures principales.

2. Associer chacun des intervalles de la ligne du haut avec un ensemble de la ligne du bas :

a. $\left[\frac{2\pi}{3}\,;\,\frac{7\pi}{6}\right]$ b. $\left[\frac{23\pi}{6}\,;\,\frac{14\pi}{3}\right]$

c. $\left[-\frac{4\pi}{3}\,;\,\frac{\pi}{6}\right]$ α. $\left]-\pi\,;\,\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{2\pi}{3}\,;\,\pi\right]$

β. $\left]-\pi\,;\,-\frac{5\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{2\pi}{3}\,;\,\pi\right]$ γ. $\left[-\frac{\pi}{6}\,;\,\frac{2\pi}{3}\right]$

Exercice D.24

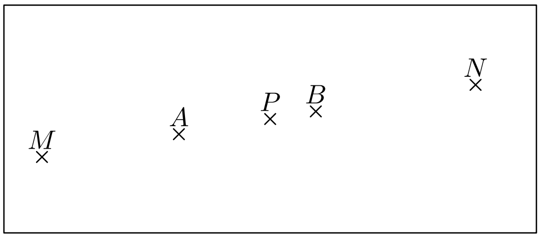
On considère les deux intervalles de nombres réels :

a. $I=\left[-\frac{19\pi}{6}\,;\,-\frac{11\pi}{4}\right[$ b. $J=\left]\frac{20\pi}{3}\,;\,\frac{49\pi}{6}\right[$

Supposons que ces deux intervalles représentent des mesures d'angles orientées; exprimer chacun de ces deux intervalles à l'aide des mesures principales associées de ces angles.

Exercice D.25

On considère, dans le plan, cinq points M, A, P, B, N alignés dans cet ordre.



1. Déterminer la mesures des angles suivant :

a. $MAMB$ b. $PAPB$ c. $NANB$

d. $ABMP$ e. $ABPM$

2. Sur la figure ci-dessus, déterminer le lieu géométrique du Q vérifiant respectivement :

a. $\left(\overrightarrow{QA}\,;\overrightarrow{QB}\right)=\pi+2k\pi$

b. $\left(\overrightarrow{QA}\,;\overrightarrow{QB}\right)=0+2k\pi$

Exercice D.26

Soit A et B deux points fixés du plan. Déterminer le lieu géométrique des points M vérifiant les relations suivantes : faire une représentation d'une telle situation en précisant les emplacement possibles du point M.

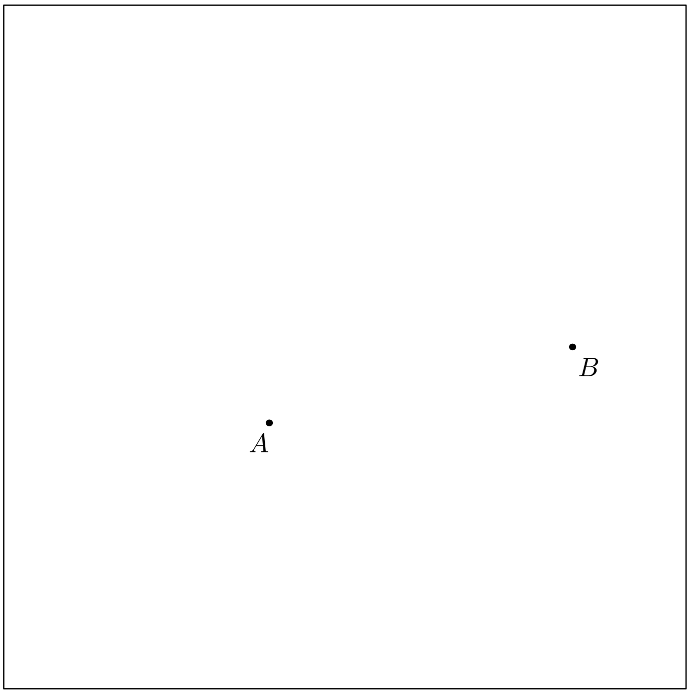
a. $\left(\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MB}\right)=\pi+2k\pi$ b. $\left(\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MB}\right)=0+2k\pi$

c. $\left(\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MB}\right)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ d. $\left(\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MB}\right)=-\frac{\pi}{2}+k\pi$

e. $\left(\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MB}\right)=\pi+k\pi$

Exercice D.27

On considère ci-dessous deux points A et B du plan :



Toutes les constructions demandées ne doivent être effectuées qu'à l'aide du compas et de la règle non-graduée. Les traits de constructions doivent rester présent sur la figure.

1. Placer un point C vérifiant :

$$\left(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB}\right)=\frac{\pi}{3}$$

2. Tracer le cercle circonscrit au triangle ABC.

3. Mettre en évidence le lieu des points M vérifiant la relation suivante :
$$\left(\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MB}\right)=\frac{\pi}{3}$$
Quel est le théorème utilisé ?

Exercice D.28

1. a. Compléter le tableau ci-dessous :

k	-2	-1	0	1	2
$\frac{\pi}{3}+k\pi$					

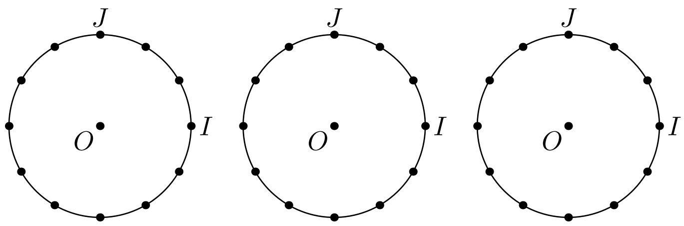
b. Sur un des cercles trigonométrique ci-dessous, représenter l'ensemble des points M vérifiant la relation :
$$\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM}\right)=\frac{\pi}{3}+k\pi \quad \text{où } k\in\mathbb{Z}.$$

2. Dans chaque cas, représenter l'ensemble des points M vérifiant la relation précisée :

a. $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM}\right)=\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{3}$

b. $2\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM}\right)=\frac{-2\pi}{3}+k\pi$

Les cercles suivants ont été partagés en douze parties égales.



Exercice D.29

On considère les expressions suivantes, où k est un entier relatif :

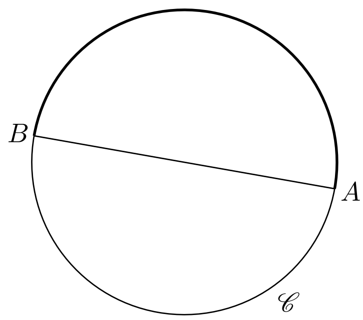
a. $\frac{\pi}{2}+k\pi$ b. $\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$

c. $\pi+\frac{k\pi}{3}$ d. $\frac{3\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}$

Dans chaque cas, déterminer l'ensemble des points M, lorsque k décrit $\mathbb{Z}$, du cercle trigonométrique repérés par cette mesure d'angle .

Exercice D.30

On représente ci-dessous un cercle de diamètre $[AB]$.



1. Soit M un point du demi-dercle mis en gras sur la figure.

Donner la mesure de $\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)$.

2. Déterminer l'ensemble des points N du plan vérifiant :
$$\left(\overrightarrow{NA};\overrightarrow{NB}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi.$$

3. Quel sont les deux théorèmes utiles pour cet exercice ?

Exercice D.31

1. En choisissant un encadrement adéquat, montrer que la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 :
$$u_n=\frac{(-1)^n}{3n+1}$$

2. En choisissant un encadrement adéquat, montrer que la suite $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ; préciser sa limite :
$$u_n=\frac{2n^2+\cos n}{3n^2+5}$$

Exercice D.32

Soit $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite définie par : $u_n=\dfrac{\cos n-2n}{\sqrt{n}}$

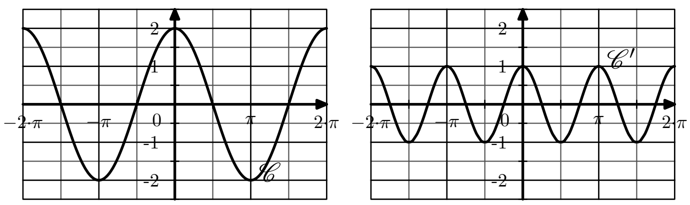
Déterminer la limite de la suite $\left(u_n\right)$.

Exercice D.33

On considère les deux fonctions suivantes f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=2\cdot\cos(x)$; $g(x)=\cos(2\cdot x)$

Associer à chacune de ces fonctions sa courbe représentative représentée ci-dessous :



Exercice D.34

Soit $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite non constante de réels. Pour tout entier n, on pose :

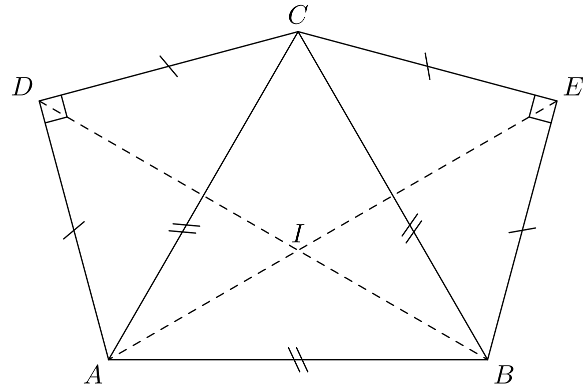
$u_n=\sin(a_n)$.

Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse et proposer une justification de la réponse choisie :

Proposition : "On peut choisir la suite $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$"

Exercice D.35

cm considère la configuration ci-dessous où ABC est un triangle équilatéral, DCA et CEB sont des triangles isocèles rectangle respectivement en D et E.



1. Donner la mesure principale en radian des angles suivants :

a. $\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AC}\right)$ b. $\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)$

c. $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BE}\right)$ d. $\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{AD}\right)$

2. a. Justifier que (DB) est la hauteur du triangle ADC issue de D et du triangle ABC issue de B.

b. Donner la mesure principale en radian des angles suivants :
$\left(\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IB}\right)$; $\left(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IE}\right)$

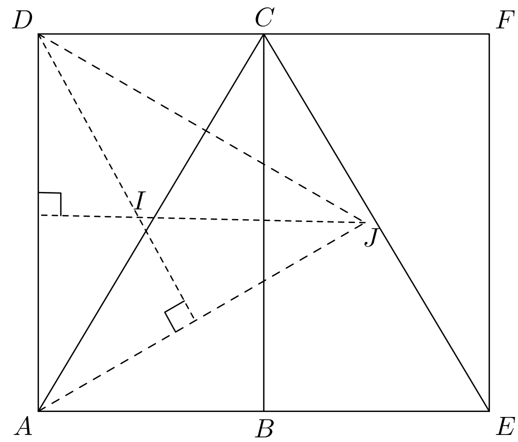
3. A l'aide de la relation de Chasles, déterminer la mesure principale en radian des angles suivants :

a. $\left(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{AB}\right)$ b. $\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{AB}\right)$ c. $\left(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{CE}\right)$

Exercice D.36

On considère un triangle AEC inscrit dans le rectangle $AEFD$. A l'intérieur du rectangle, on trace le triangle équilatéral DAJ ; on note I sont centre.

Attention, la figure ci-dessous n'a pas été tracée correctement ; le but de l'exercice est de montrer que les point I et J appartiennent respectivement aux segments $[AC]$ et $[BC]$.



On utilisera la propriété suivante :
$$\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)=\left(\vec{u}\ ;\ \vec{w}\right)$$
$\implies \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires et de même sens.

1. a. Justifier que $\left(\overrightarrow{AC}\,;\,\overrightarrow{AD}\right)=\dfrac{\pi}{6}$.

b. Justfier que l'angle au centre $\left(\overrightarrow{IA}\,;\,\overrightarrow{ID}\right)$ mesure $\dfrac{2\pi}{3}$.

c. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

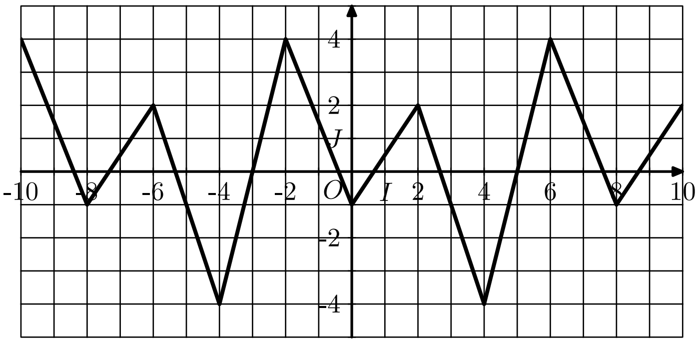
2. a. Justifier que le triangle DCJ est isocèle en J.

b. En déduire la mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CJ}\right)$.

c. En déduire que les points J, E, C sont alignés.

Exercice D.37

Dans le repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on représente ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$:



La fonction f est périodique de période T.

1. a. Déterminer, parmi les coordonnées ci-dessous, celle(s) d'un vecteur par lequel la courbe $\mathscr{C}_f$ est invariante :

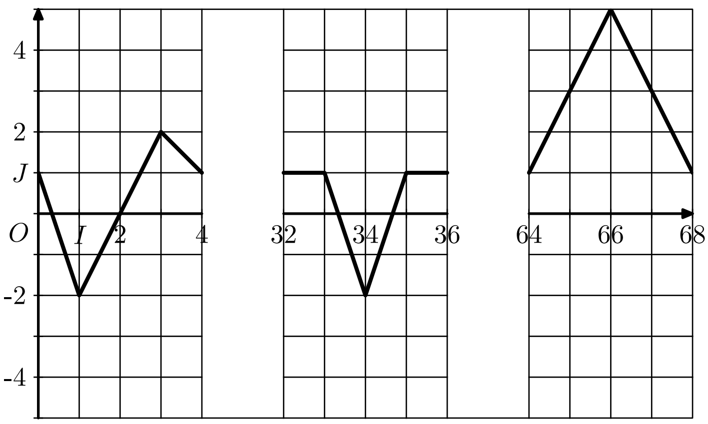
b. Déterminer la valeur de T.

2. Donner l'image, par la fonction f, des nombres suivants :

a. 14 b. -16 c. 56 e. 58

Exercice D.38

On considère la fonction f périodique de période 12. Ci-dessous est donnée quelques parties de la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f :



1. Reconstruire le tracé de $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $\big[0\,;12\big]$.

2. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $\big[38\,;50\big]$.

Exercice D.39

Pour chaque question, montrer que la fonction f admet T pour période :

a. $f(x)=\sin\left(6x-3\right)$; $T=\dfrac{\pi}{3}$

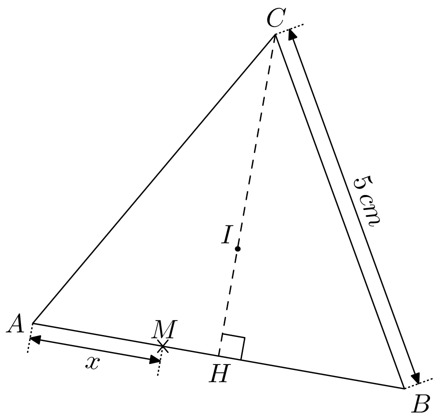
b. $f(x)=\tan\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$; $T=\pi$

c. $f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x$; $T=\pi$

d. $f(x)=\left|\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\right|$; $T=\dfrac{\pi}{2}$

Exercice D.40

On considère un triangle ABC équilatéral de côté $5\,cm$ où le point I est le centre de gravité :



On considère un point M décrivant le triangle ABC ; on repère la position du point M sur le triangle à l'aide du nombre x représentant la longueur parcourue le long du triangle ABC par le point M à partir du point A :

x est positif si le point M parcourt le triangle dans le sens $A\to B$ à partir du point A ;

x est négatif si le point M parcourt le triangle dans le sens $A\to C$ à partir du point A ;

On note f la distance IM mesurée en fonction de la valeur de x :

1. Etudions la fonction f sur l'intervalle $[0\,;5]$:

a. Montrer que l'image de x par la fonction f vérifie la relation suivante :

$$f(x)=\sqrt{\left(\frac{5}{2}-x\right)^2+\frac{25}{9}}$$

b. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0\,;5]$

2. Emettre une conjecture quant à la périodicité de la fonction f.

Exercice D.41

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image de x est définie par la relation :

$$f(x)=\cos x+\cos^2(x)$$

On appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1. Etudier la parité de la fonction f.

2. Etudier la périodicité de la fonction f.

3. a. En étudiant les images des nombres suivantes :

$$0\ ;\ \frac{\pi}{3}\ ;\ \frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{2\pi}{3}\ ;\ \pi\ ;\ \frac{4\pi}{3}\ ;\ \frac{3\pi}{2}\ ;\ \frac{5\pi}{3}$$

et en admettant les propriétés suivantes :

f est strictement décroissante sur $\left[0\,;\dfrac{2\pi}{3}\right]$;

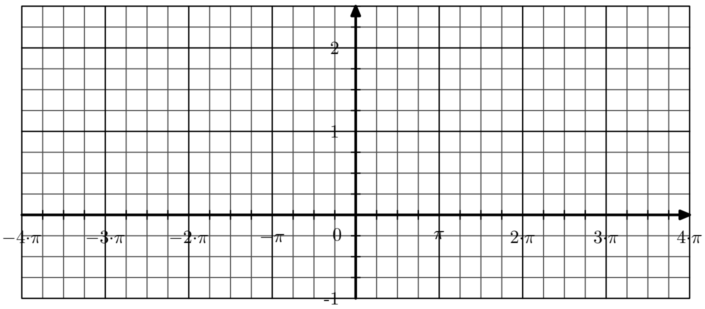
f est strictement croissante sur $\left[\dfrac{2\pi}{3}\,;\pi\right]$;

$\mathscr{C}_f$ admet les tangentes horizontales aux points d'abscisse :

$$0 \quad ; \quad \frac{2\pi}{3} \quad ; \quad \pi \quad ; \quad -\frac{4\pi}{3}$$

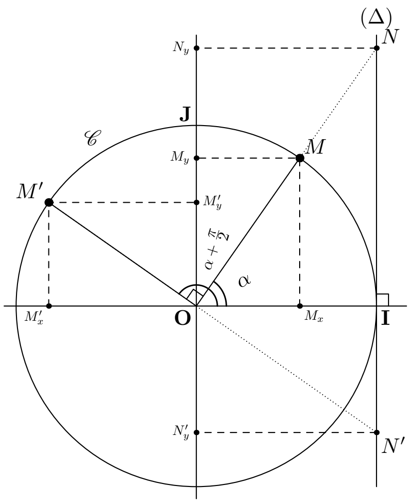
effectuer le tracé de la courbe $\mathscr{C}_f$ sur $\left[0\,;+\infty\right]$.

b. Prolonger ce tracé à l'ensemble du graphique.



Exercice D.42

Dans le plan munit d'un repère orthonormé et pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère deux points $M(\alpha)$ et $M'(\alpha+\dfrac{\pi}{2})$ du cercle trigonométrique.

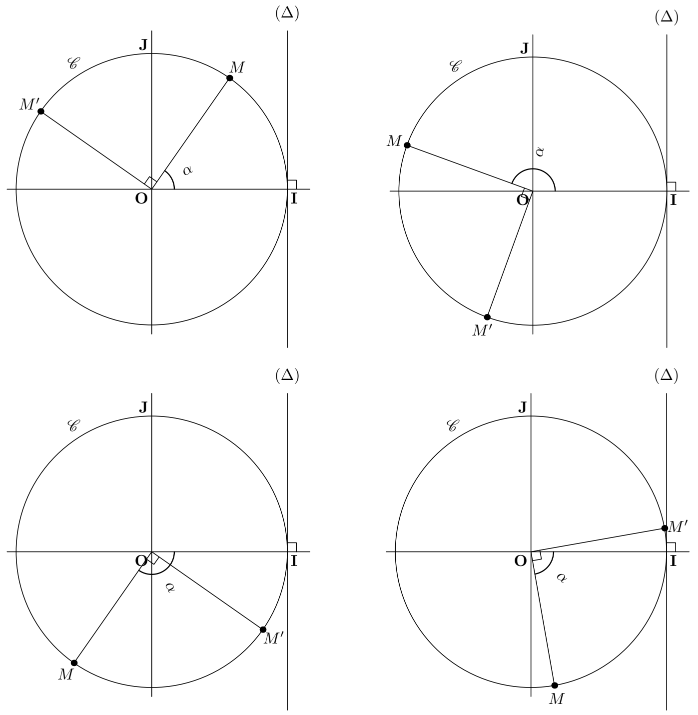


1. A l'aide des coordonnées des points figurant sur la figure, donner les valeurs du cosinus, sinus et tangente pour les angles α et $\alpha+\dfrac{\pi}{2}$.

2. a. Par quel transformation, le triangle OMM_x a pour image le triangle $OM'M'_y$?

   b. En déduire les valeurs de $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)$ et $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)$ en fonction de $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$.

3. Nous allons déterminer le signe des différentes valeurs des fonctions trigonométriques pour les angles α et $\alpha+\dfrac{\pi}{2}$. Ceci afin de s'assurer de la validité des formules trouvées à la question 2. quel que soit la valeur de l'angle α :



	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\tan\alpha$
$\alpha \in \left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$			
$\alpha \in \left]\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right[$			
$\alpha \in \left]-\pi\,;-\dfrac{\pi}{2}\right[$			
$\alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;0\right[$			

	$\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)$	$\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)$	$\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)$
$\alpha \in \left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$			
$\alpha \in \left]\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right[$			
$\alpha \in \left]-\pi\,;-\dfrac{\pi}{2}\right[$			
$\alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;0\right[$			

On en déduit que :

$$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\tan\alpha.$$

Question subsidiaire :

Nous allons montrer d'une autre manière que :

$$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan\alpha} :$$

4. a. Exprimer ON en fonction de α.

   b. En utilisant le fait que $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$, exprimer la valeur de ON' en fonction de α

   c. En déduire l'aire du triangle ONN'.

5. En utilisant le fait que (OI) est la hauteur du triangle ONN' issue de O, calculer d'une seconde manière l'aire du triangle ONN'.

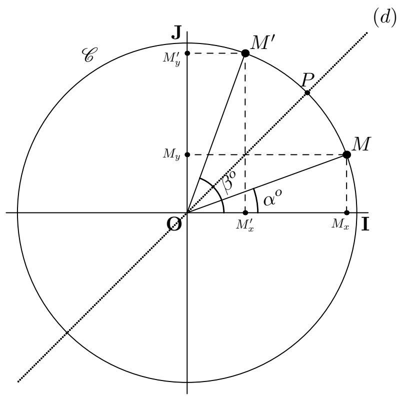
6. Etablir la formule suivante :

$$IN' + \tan\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}\times\frac{1}{\sin\alpha}$$

7. En déduire la relation : $\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{1}{\tan\alpha}$.

Exercice D.43

Dans le repère orthonormal $(O\,;\,I\,;\,J)$, on considère le cercle $\mathscr{C}$ trigonométrique : c'est à dire le cercle de centre O et de rayon 1.



On note les points M et M' respectivement repéré par les angles complémentaires α et β *($\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$)*. On note :

$M(\alpha)$ et $M'(\beta)$

On note (d) la bissectrice de l'angle $\widehat{JOI}$ et P le point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec (d)

1. Dans cette question, nous allons montrer que les deux points M et M' sont symétriques relativement à la droite (d). Pour cela, notons N le symétrique du point M par rapport à la droite (d) :

a. Justifier que le point N est un point du cercle $\mathscr{C}$.

b. Donner la mesure de l'angle $\widehat{JON}$ en fonction de α.
En déduire que le point N appartient à la demi-droite $[OM')$.

c. Justifier que le symétrique de M relativement à la droite (d) est le point M'.

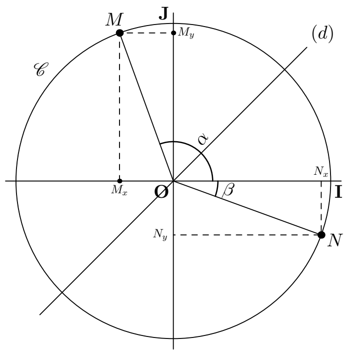
On note M_x *(resp. M'_x)* le projeté orthogonal sur l'axe des abscisses et M_y *(resp. M'_y)* le projeté orthogonal sur l'axe des ordonnées du point M *(resp. M')*

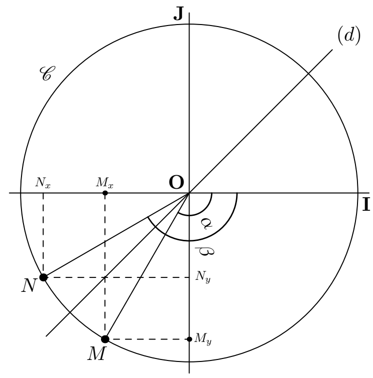
2. a. Etablir des liens entre les coordonnées des points M et M' dans le repère $(O\,;\,I\,;\,J)$.

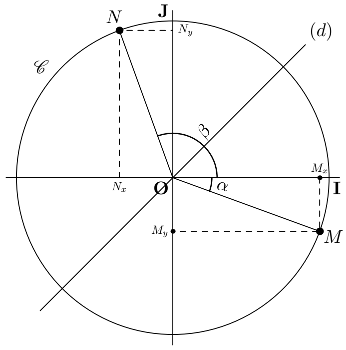
b. En déduire les relations suivantes :

$$\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\quad;\quad\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

Pour finir l'étude de comparaison du cosinus et du sinus de deux angles complémentaire, il faut aussi voir ce qui se passe si le point M se trouve sur un autre quadrant sur le cercle trigonométrique. On considère deux points M et N du cercle trigonométrique caractérisés respectivement par les angles α et β ainsi que leurs projetés orthogonaux respectifs sur les axes du repère :







3. a. Pour chacune des trois figures ci-dessous, établir oralement la véracité de l'assertion ci-dessous :

Les angles α et β sont complémentaire si, et seulement si, les points M et N sont symétriques relativement à la droite (d)

b. Justifier que ceci nous suffit pour établir pour toute valeur de α, les égalités suivantes :

$$\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\quad;\quad\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

4. En déduire la relation liant $\tan\alpha$ et $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$

E. Fonctions numériques:

Exercice E.1

On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :

$$f(x)=\frac{3x-1}{2x+1}$$

1. Donner l'ensemble de définition de cette fonction.

2. En traçant la courbe représentative de cette fonction à votre calculatrice, faire une conjecture sur la valeur des limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto+\infty}f(x)\quad;\quad\lim_{x\mapsto-\infty}f(x)$$

$$\lim_{x\mapsto-\frac{1}{2}^{+}}f(x)\quad;\quad\lim_{x\mapsto-\frac{1}{2}^{-}}f(x)$$

3. a. Etablir la relation algébrique suivante :

$$f(x)=\frac{-5}{4x+2}+\frac{3}{2}$$

b. En déduire la valeur des limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto+\infty}f(x)\quad;\quad\lim_{x\mapsto-\infty}f(x)$$

4. a. Que peut-on dire du signe de $3x-1$ lorsque x se rapproche de $-\dfrac{1}{2}$?

b. En déduire la valeur des limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto -\frac{1}{2}^{+}} f(x) \quad ; \quad \lim_{x\mapsto -\frac{1}{2}^{-}} f(x)$$

Exercice E.2

On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=\frac{3x^2-x+3}{3x-1}$$

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.

2. a. Tracer la courbe représentative de cette fonction à votre calculatrice.

   b. En effectuant des "*Zoom out*", observez l'allure de la courbe au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$. Que pouvez-vous dire sur l'allure de la courbe ?

3. a. Etablir la relation algébrique suivante :

   $$f(x)=\frac{3}{3x-1}+x$$

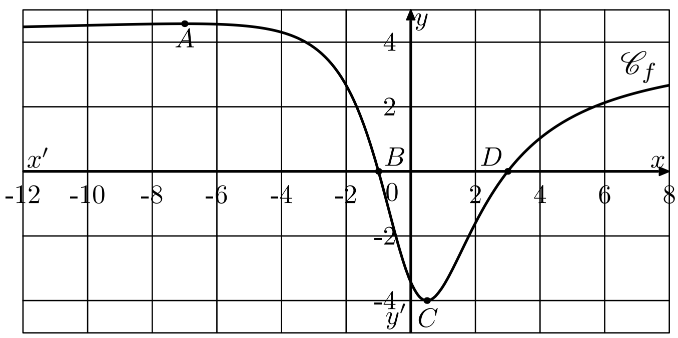
   b. Donner la valeur des limites suivantes :

   $$\lim_{x\mapsto-\infty} f(x)-x \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} f(x)-x$$

4. En déduire les observations faîtes à la calculatrice.

Exercice E.3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous dans un repère orthonormal :



La courbe $\mathscr{C}_f$ admet deux tangentes horizontales aux points A et C d'abscisses respectives -7 et $\dfrac{1}{2}$;

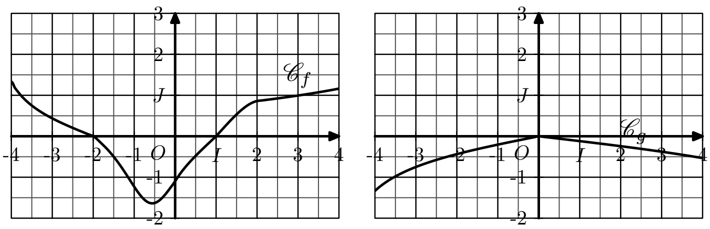
La courbe $\mathscr{C}_f$ intercepte l'axe des abscisses aux points B et D de coordonnées respectives $\big(-1\,;0\big)$ et $\big(3\,;0\big)$.

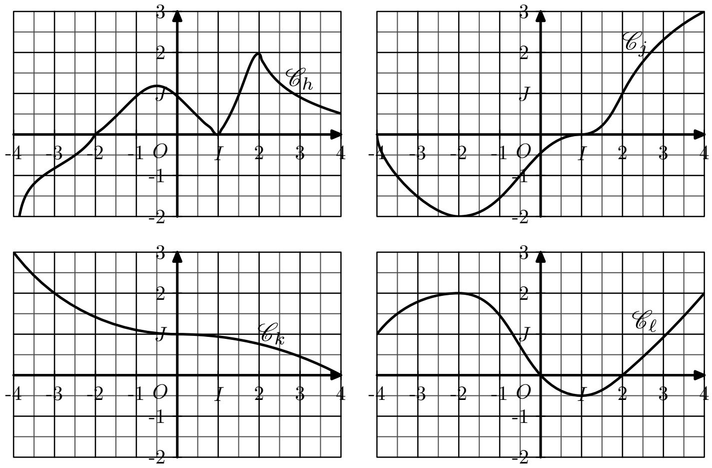
1. On considère la fonction g qui admet pour dérivée la fonction f $(g'{=}f)$. Dresser le tableau de variation de la fonction g.

2. On considère la fonction h qui est la dérivée de la fonction f $(f'{=}h)$. Dresser le tableau de signe de la fonction h.

Exercice E.4

On considère les six fonctions f, g, h, j, k, l définies sur $[-4\,;4]$ dont les courbes représentatives sont données ci-dessous :

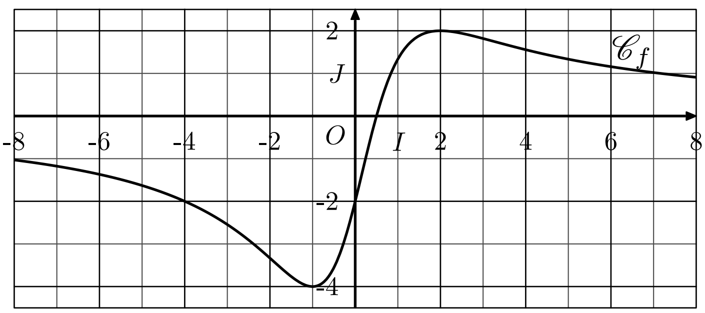




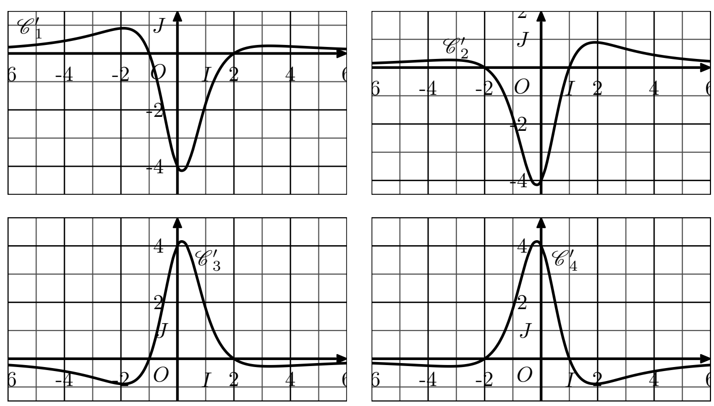
Associer à trois de ces fonctions leurs trois dérivées correspondantes.

Exercice E.5

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ qui admet dans le repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ la courbe $\mathscr{C}_f$ pour représentation :

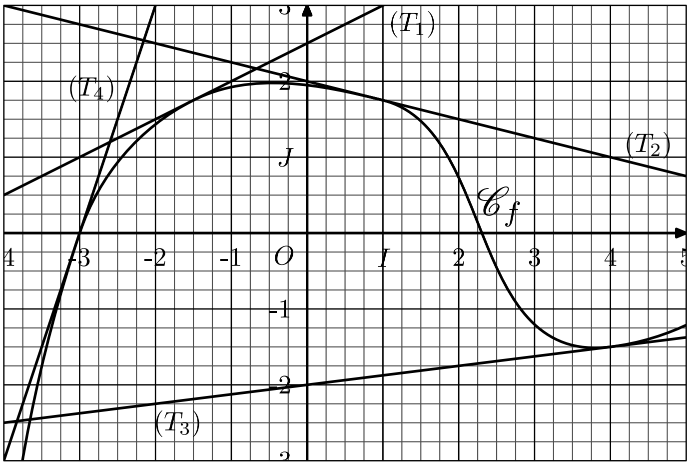


Parmi les quatres courbes $\mathscr{C}'_1$, $\mathscr{C}'_2$, $\mathscr{C}'_3$ et $\mathscr{C}'_4$ présentées ci-dessous, déterminer la courbe représentative de la fonction f', dérivée de la fonction f. Justifier votre choix :



Exercice E.6

Ci-dessous est représentée, dans le repère $(O\,;I\,;J)$, la courbe $\mathscr{C}_f$ et quatre de ses tangentes :



1. La droite (T_1) s'appelle :

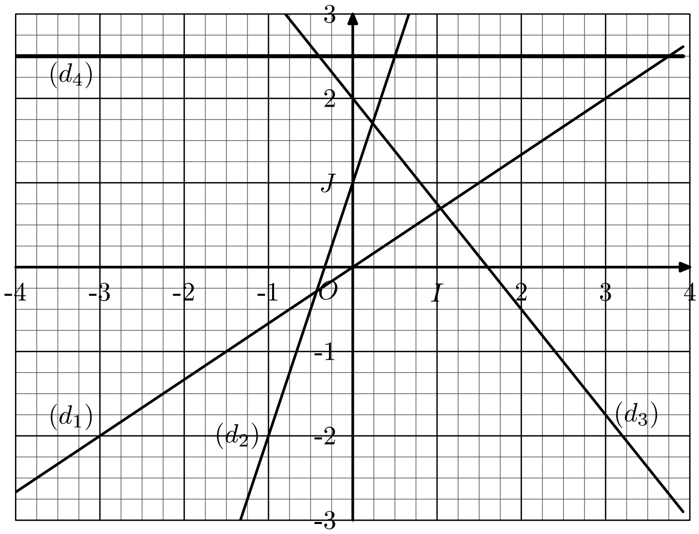
   "*La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $-1{,}5$*"

   Nommez de même les trois autres droites.

2. Déterminer l'équation réduite de chacune de ces quatres tangentes.

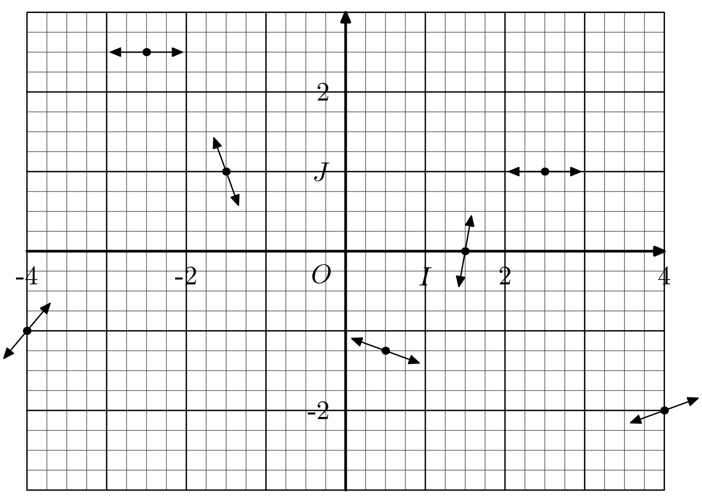
Exercice E.7

Déterminer les coefficients directeurs des quatre droites représentées ci-dessous :



Exercice E.8

Tracer la courbe représentative d'une fonction passant par tous les points indiquées et respectant en chacun d'eux la tangente représentée :

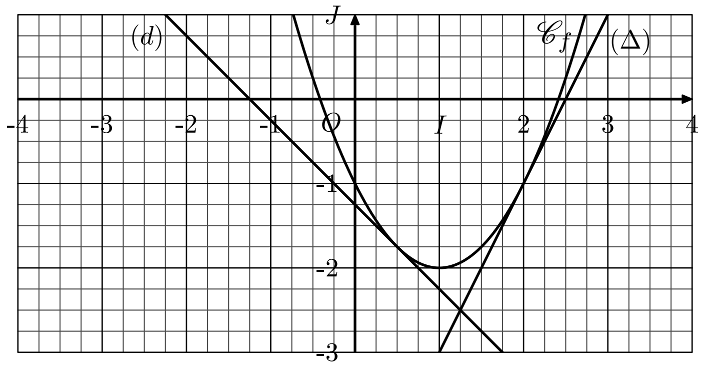


Exercice E.9

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$f(x) = x^2 - 2{\cdot}x - 1$

On munit le plan d'un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ orthonormal. On donne ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de f.



On note respectivement (d) et (Δ) les tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$ et 2.

1. Déterminer les coordonnées des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ ayant respectivement $\dfrac{1}{2}$ et 2 pour abscisse.

2. Graphiquement :

   a. Déterminer les coefficients directeurs des droites (d) et (Δ).

   b. Déterminer les équations réduites des droites (d) et (Δ).

Exercice E.10

Déterminer les limites ci-dessous :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} x{\cdot}(2x+1)$

b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} (3-4x)(x+1)$

c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} 3x^2+2x+\frac{3}{2x+1}$

d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{3x-4}{5+\dfrac{1}{x}}$

e. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} \frac{3}{2x-1}$

f. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} \frac{x^2+x}{x^3-2x}$

Exercice E.11

Parmi les limites proposées ci-dessous, donner celles représentant une forme indéterminée ; donner la valeur des autres limites :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} 2x^4-x^3$

b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} 5x^3-2x^2$

c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{3}{5-2x}$

d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} \sqrt{2+x^2}$

e. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{x+\sqrt{x}}{x^2}$

f. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} \frac{x^2+1}{-x^4+x}$

Exercice E.12

Déterminer les limites ci-dessous :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{3x+2}{5-3x}$

b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{x^2+3x-1}{2x+1}$

c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} \frac{3-2x}{x^2-4x+7}$

d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{5x^2-3}{5-3x^2}$

e. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} \frac{x^4+3x+1}{x^3-2x^2+4}$

f. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{x^{100}-5x^{44}+x^{14}}{3x^{102}-5x^{56}}$

Exercice E.13

Déterminer chacune des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} -5x^3-7x$

b. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} 2x^3-3x^2$

c. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \dfrac{x^7-5x^6}{2}$

d. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{x^5-x^3+2}{-2x^2-x+2}$

e. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \dfrac{x^3-x^2+5}{x^4+3x+1}$

f. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \dfrac{x^2-5x+2}{-3x^2+5x-1}$

Exercice E.14

On considère la fonction f dont l'image de x est définie par la relation :

$$f(x)=\frac{2x+1}{3x^2+2x+1}$$

1. Montrer que l'ensemble de définition de la fonction f est l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

2. Déterminer l'expression de la fonction dérivée f' de la fonction f.

3. a. Déterminer le tableau de signe de f' sur $\mathbb{R}$..

   b. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
   On admettra les deux limites suivantes :
   $\lim\limits_{h\mapsto-\infty} f(x)=0$; $\lim\limits_{h\mapsto+\infty} f(x)=0$

4. En déduire les extrémums de la fonction f.

Exercice E.15

On considère la fonction définie par la relation suivante :

$$f\colon x\longmapsto (5x^2+5x-4)\cdot\sqrt{x}$$

1. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}_f$ de définition de la fonction f.

2. a. Déterminer l'expression de la fonction dérivée de f.

   b. Dresser le tableau de signe de la fonction f'.

3. Donner le tableau de variation de la fonction f.
   On admet les deux limites suivantes :
   $\lim\limits_{x\mapsto0^+} f(x)=0$; $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)=+\infty$

Exercice E.16

On considère la fonction f définie par :

$$f\colon x\longmapsto \sqrt{x}\cdot\left(-5x^2-5x-1\right)+\frac{1}{2}$$

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.

2. Déterminer l'expression de la fonction dérivée f.

3. Dresser le tableau de variation complet de la fonction f.
   On admet la limite suivante : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)=-\infty$

4. a. Justifier que la fonction f s'annule une seule fois sur son ensemble de définition.

   b. Justifier, à l'aide de valeur approchée, que la fonction f s'annule entre $\dfrac{1}{10}$ et $\dfrac{15}{100}$.

Exercice E.17

On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x)=\frac{3x^2-2x-2}{2x^2+x+1}$$

1. Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

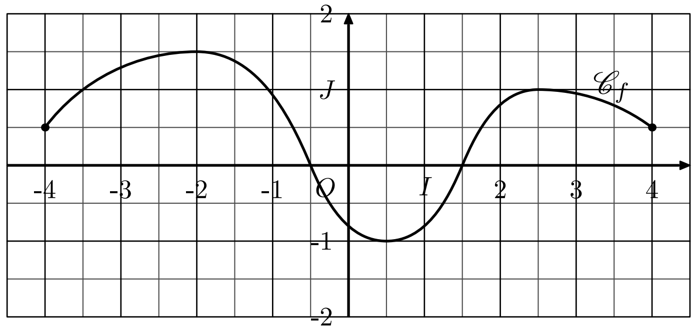
2. a. Etablir que la fonction dérivée f' admet l'expression suivante :
   $$f'(x)=\frac{7x^2+14x}{\left(2x^2+x+1\right)^2}$$

   b. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
   On admet les deux limites suivantes :
   $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)=\dfrac{3}{2}$; $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)=\dfrac{3}{2}$

3. En déduire que la fonction f admet pour minorant le nombre -2 et pour majorant le nombre 2.

Exercice E.18

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $\left[-4\,;\,4\right]$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée dans le repère $\left(O\,;I\,;J\right)$ orthonormé ci-dessous :



On répondra à l'ensemble des questions de cet exercice en se référant au graphique ci-dessus.

1. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $\left[-4\,;4\right]$.

2. a. On considère la tangente (T_1) la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -3. Donner le signe du coefficient directeur de la tangente (T_1).

   b. On considère la tangente (T_2) la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0. Donner le signe du coefficient directeur de la tangente (T_2).

   c. On considère la tangente (T_3) la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -2. Donner le signe du coefficient directeur de la tangente (T_3).

3. a. Quel est le signe du nombre dérivée de la fonction f en $x=-1$?

   b. Quel est le signe du nombre dérivée de la fonction f en $x=2$?

   c. Quel est le signe du nombre dérivée de la fonction f en $x=2{,}5$?

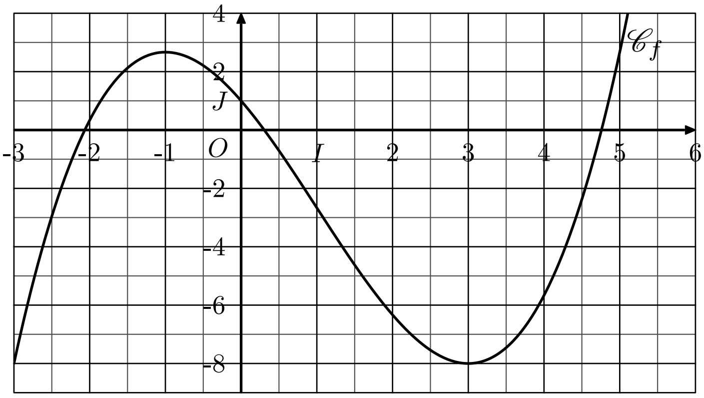
4. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Dresser le tableau de signe de la fonction f'.

Exercice E.19

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x)=\frac{1}{3}\cdot x^3-x^2-3x+1$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f est donnée dans le repère $\left(O\,;I\,;J\right)$ orthogonal ci-dessous :



1. Graphiquement, dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $\big[-3\,;6\big]$. *(on n'indiquera pas les valeurs des images)*

2. a. Déterminer l'expression de la fonction f'.

   b. Dresser le tableau de signe de la fonction f' sur $\mathbb{R}$.

3. Que remarque-t-on ?

Exercice E.20

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{3x-4}{x^2+1}$$

1. a. Déterminer l'expression de la fonction dérivée f'.

   b. Dresser le tableau de signe de la fonction f'.

2. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
   On admettra les deux limites suivantes :
   $$\lim_{x\mapsto-\infty} f(x) = 0 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} f(x) = 0$$

3. La fonction f admet-elle des extrémums ? Si oui, préciser leurs caractéristiques.

Exercice E.21

On note f la fonction inverse. On rappelle que f est définie sur $\mathbb{R}^*$.

1. a. Remplir le tableau ci-dessous :

x	1	0,1	0,01	0,001	10^{-5}	10^{-10}	5×10^{-99}
$f(x)$							

   b. Que peut-on dire de la valeur de $f(x)$ lorsque x strictement positif se rapproche indéfiniment de 0 sur la demi-droite $\mathbb{R}_+$ sans atteindre ce point.

2. Que peut-on dire de la valeur de $f(x)$ lorsque x strictement négatif se rapproche indéfiniment de 0 sur la demi-droite $\mathbb{R}_-$ sans atteindre ce point.

Exercice E.22

Déterminer les limites suivantes :

a. $\displaystyle\lim_{h\mapsto0} h-2$ b. $\displaystyle\lim_{h\mapsto0} \frac{2h^2+1}{h}$

c. $\displaystyle\lim_{h\mapsto0} \frac{5h^3+2h^2}{h}$ d. $\displaystyle\lim_{h\mapsto0} \frac{h+1}{h+2}$

e. $\displaystyle\lim_{h\mapsto0} \frac{2h^2+h}{3h}$ f. $\displaystyle\lim_{h\mapsto0} \frac{h^3+2h^2}{2h}$

Exercice E.23

On considère trois fonctions f, g et h trois fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par les relations :

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2+3} \quad ; \quad g(x) = \frac{2{\cdot}x-1}{\sqrt{x}} \quad ; \quad h(x) = \frac{2{\cdot}x^2+x}{5{\cdot}x}$$

On donne ci-dessous un tableau de valeurs pour chacune des fonctions :

x	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$f(x)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2{,}1}{3{,}01}$	$\frac{2{,}01}{3{,}000\,1}$	$\frac{2{,}000\,1}{3{,}000\,001}$	$\frac{2{,}0000\,1}{3{,}000\,000\,01}$

x	0,01	0,000 1	0,000 001
$g(x)$	$\frac{-0{,}98}{0{,}1}$	$\frac{-0{,}999\,8}{0{,}01}$	$\frac{-0{,}999\,998}{0{,}00\,1}$

x	1	0,1	0,01	0,001	0,000 1
$h(x)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{0{,}12}{0{,}5}$	$\frac{0{,}010\,2}{0{,}05}$	$\frac{0{,}001\,002}{0{,}005}$	$\frac{0{,}000\,100\,02}{0{,}000\,5}$

Remarquez que, dans chaque tableau, les valeurs de x "*progressent lentement*" vers 0.

1. a. Pour chaque tableau et à l'aide de la calculatrice, observer la progression de des valeurs approchées de ces quotients.

   b. Dans chaque cas, faire une conjecture sur la valeur limite de ces images lorsque :
   "*x tend vers 0 par des valeurs supérieures à 0*"
   Pour la fonction f, cette valeur se note :
   $\displaystyle\lim_{\substack{x\mapsto0\\x>0}} f(x)$ ou $\displaystyle\lim_{x\mapsto0^+} f(x)$

2. A l'aide de votre calculatrice, tracer les courbes représentatives de ces fonctions et observer la courbe au "*voisinage*" de l'axe des ordonnées.

Exercice E.24

Déterminer l'expression des dérivées des fonctions suivantes :

a. $f\colon x \longmapsto x^2+\cos x$ b. $g\colon x\longmapsto \sin(2x)$

c. $h\colon x\longmapsto \cos x{\cdot}\sin x$ d. $j\colon x\longmapsto \big(\sin x\big)^2$

Exercice E.25

Déterminer l'expression des fonctions dérivées associées aux fonctions suivantes :

a. $f(x) = x^2{\cdot}\cos x$ b. $g(x) = \big(3x^2-2\big){\cdot}\big(\sin x\big)^2$

c. $h(x) = \dfrac{3}{2{\cdot}\cos x}$ d. $j(x) = \dfrac{\cos x}{3x+\sin x}$

Exercice E.26

Déterminer l'expression des fonctions dérivées des fonctions f, g, h définies ci-dessous :

a. $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ b. $g(x) = (5x-3)^3\cdot\cos x$

c. $h(x) = \dfrac{\cos\left(5x+\dfrac{\pi}{3}\right)}{x^2}$

Exercice E.27

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

a. $f(x) = 2x{\cdot}\sin\big(3x+1\big)$ b. $g(x) = \dfrac{2{\cdot}\cos\big(2x\big)}{3-\sin\big(1-2x\big)}$

Exercice E.28

Déterminer les limites ci-dessous :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto\frac{1}{2}^-} \frac{3}{2x-1}$ b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto3^-} \frac{-2}{3-x}$

c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto\frac{3}{2}^+} \frac{4-x}{3-2x}$ d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto5^-} \frac{(x-5)(7-x)}{2x-10}$

e. $\displaystyle\lim_{x\mapsto4^-} \frac{1}{\sqrt{8-2x}}$ f. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-2^-} \frac{3x^2+4x-4}{2x+4}$

Exercice E.29

Déterminer, si possible, les limites ci-dessous :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto0^+} \frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$ b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto0^-} \frac{3x^4-2x^2}{5x^2-x}$

c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto0^-} \frac{6x^{12}+5x^6-3x^2}{3x^8-5x^2}$ d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto0^+} \frac{1}{x\sin x}$

Exercice E.30

Parmi les limites proposées ci-dessous, déterminer celles représentant une forme indéterminée ; donner la valeur des autres limites :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto0^+} \frac{x^2+2}{x}$ b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto2} \frac{x^2-4x+4}{2x^2+x-6}$

c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto\frac{3}{2}^-} \sqrt{3-2x}$ d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto0} \frac{x^3-2x}{2x^2-3x+1}$

e. $\displaystyle\lim_{x\mapsto0^+} \frac{5}{\sqrt{x^2+x}}$ f. $\displaystyle\lim_{x\mapsto4^-} 5x+3-\frac{2}{x-4}$

Exercice E.31

Déterminer les limites suivantes :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto3^+} \frac{1}{(x-3)(x-5)}$ b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-2^+} 3x-2-\frac{2x+1}{2+x}$

c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto0^-} \big(2x^2+x\big)\Big(\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3}\Big)$ d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto\frac{2}{5}^+} \frac{10x^2+x-2}{-2x^2-5x-2}$

Exercice E.32

Déterminer les valeurs des limites suivantes :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto0} \frac{x^4-x^3}{x^2}$ b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto2^+} \frac{x+5}{4-2x}$

c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-1} \frac{x+1}{x^2-1}$ d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto3^+} \frac{x-5}{3x^2-11x+6}$

e. $\displaystyle\lim_{x\mapsto\frac{1}{3}^+} \frac{3x^2+2x-1}{x-1}$ f. $\displaystyle\lim_{x\mapsto2^+} \frac{-2x^2+7x-6}{x^2-4x+4}$

Exercice E.33

On considère la fonction f définie par :

$$f\colon x\longmapsto x+\frac{1}{x}$$

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.

2. a. Par des calculs mentaux, Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	1	10	100	1000
$f(x)$				

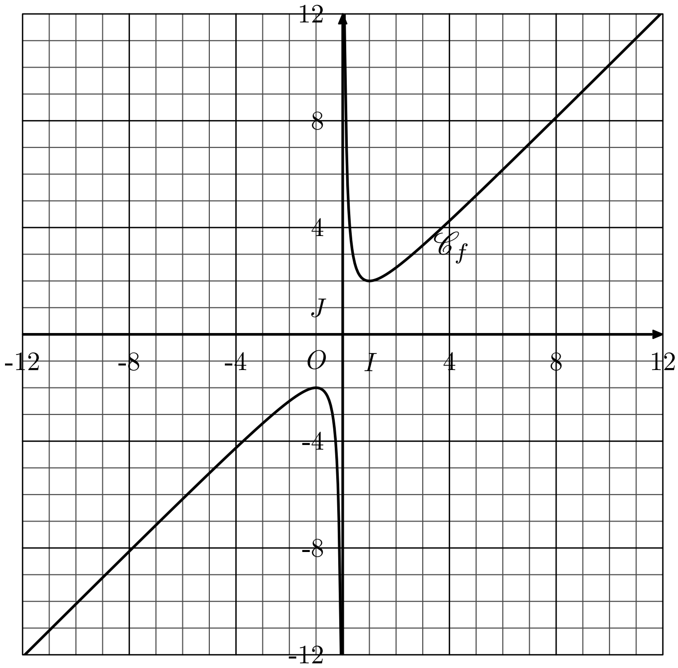
b. Que peut-on dire de la valeur de "$f(x)$" lorsque "x" grandit énormément ?

3. a. Par des calculs mentaux, compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
$f(x)$				

b. Que peut-on dire de la valeur de "$f(x)$" lorsque "x" reste positif mais en devenant de plus en plus petit ?

Ci-dessous, est donnée la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f dans un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ orthonormée :



4. Interpréter graphiquement les résultats de la question 3..

Exercice E.34

On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :

$$f(x)=\sin\Big(\frac{1}{x}\Big)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

2. a. Recopier et compléter le tableau de valeur ci-dessous :

x	$\frac{1}{2\pi}$	$\frac{1}{4\pi}$	$\frac{1}{40\pi}$	$\frac{1}{2^{72}\pi}$
$f(x)$				

b. Recopier et compléter le tableau de valeur ci-dessous :

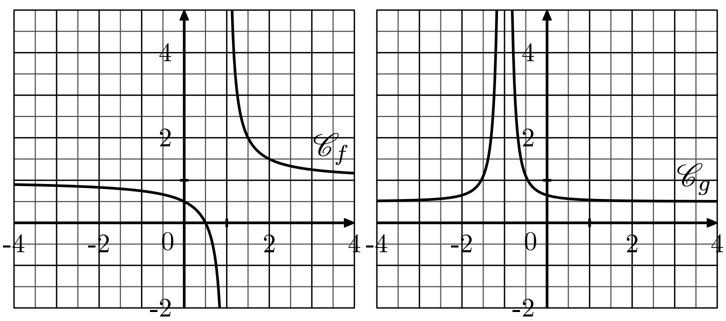
x	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{2}{5\pi}$	$\frac{2}{41\pi}$	$\frac{2}{(2^{101}+1)\pi}$
$f(x)$				

c. Peut-on paler de limite pour cette fonction lorsque x se rapproche de 0 ?

3. Effectuer le tracé de la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de cette fonction puis effectuer un zoom sur l'origine du repère. Que voyez-vous ?

Exercice E.35

On munit le plan d'un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ orthonormal dans lequel sont représentées les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives des fonctions f et g :



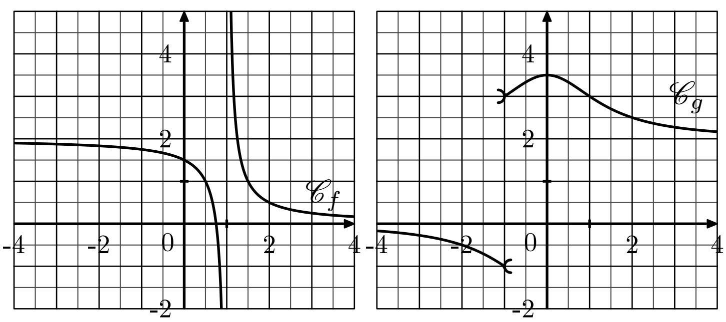
Graphiquement, donner, si possible, la valeur des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$ b. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)$ c. $\lim\limits_{x\mapsto1^+} f(x)$

d. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} g(x)$ e. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} g(x)$ f. $\lim\limits_{x\mapsto-1^+} g(x)$

Exercice E.36

On munit le plan d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormal dans lequel sont représentées les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives des fonctions f et g :



Graphiquement, donner, si possible, la valeur des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$ b. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)$ c. $\lim\limits_{x\mapsto1^-} f(x)$

d. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} g(x)$ e. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} g(x)$ e. $\lim\limits_{x\mapsto-1^-} g(x)$

Exercice E.37

On considère la fonction f définie par :

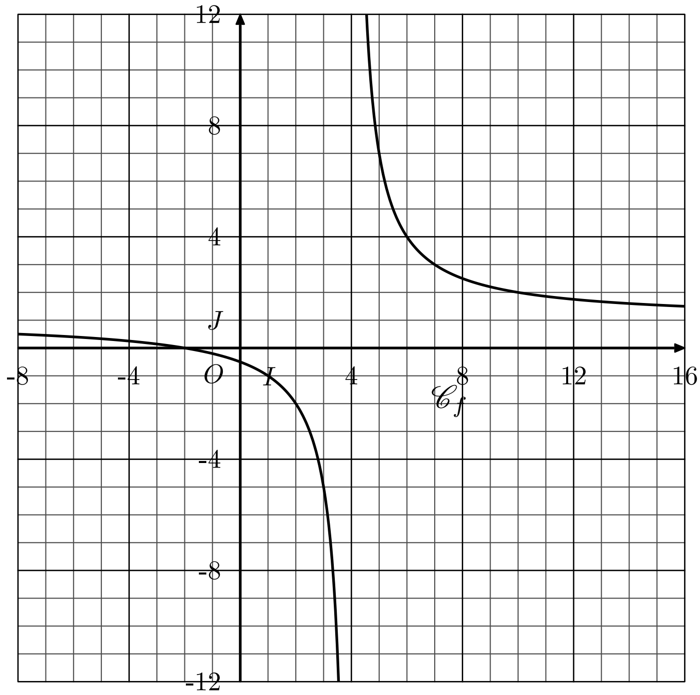
$$f\colon x \longmapsto \frac{x+2}{x-4}$$

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.

2. Déterminer la valeur des réels a et b réalisant l'identité suivante pour tout $x\in\mathcal{D}_f$:
$$f(x) = a + \frac{b}{x-4}$$

3. A l'aide de l'expression obtenue à la précédente question :
   a. Que peut-on dire de la valeur de $f(x)$ lorsque la valeur de x grandit indéfiniment ?
   b. Que peut-on dire de la valeur de $f(x)$ lorsque x appartient à $]4\,;5]$ et que sa valeur se rapproche de plus en plus près de 4 ?
   c. Que peut-on dire de la valeur de $f(x)$ lorsque x appartient à $[3\,;4[$ et que sa valeur se rapproche de plus en plus près de 4 ?

Ci-dessous, est donnée la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f dans un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormée :



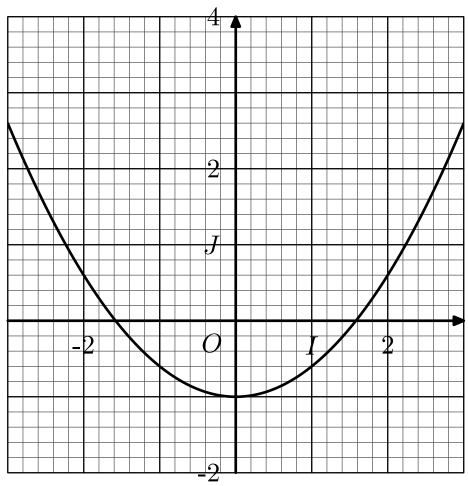
4. Interpréter graphiquement les résultats précédement obtenus.

Exercice E.38

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{2}{5}x^2 - 1$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé donné ci-contre :
Le but de l'exercice est de déterminer l'équation réduite de la tangente, notée (T), à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.



1. a. Montrer que pour h un nombre réel non-nul, on a :
$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}\cdot h.$$
   b. En déduire la valeur du nombre dérivée $f'(1)$ de la fonction f en 1.

2. a. Justifier que l'expression de la tangente (T) est de la forme :
$$y = \frac{4}{5}\cdot x + b$$
   b. Donner les coordonnées du point appartenant à la courbe $\mathscr{C}_f$ ayant pour abscisse 1.
   c. Déterminer l'expression réduite de la tangente (T).

3. Tracer la tangente (T) dans le repère ci-dessus.

Exercice E.39

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x}{|x|}$ b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{|x|}{x}$

c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ d. $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty}\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x}$

e. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\sqrt{2x+1}-\sqrt{x}$

f. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-1^+}\frac{1}{\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+3x+2}}$

Exercice E.40

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{4x^2+2x-1}{-2x+1}$ b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\frac{2}{3}^+}\frac{3x^2-1}{12x^2+23x+10}$

c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-2^-}\frac{-x^2+x+6}{4x^2+16x+16}$ d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto1^-}\frac{1}{1-x^2}-\frac{1}{(1-x)^2}$

e. $\displaystyle\lim_{x\mapsto4^+}\frac{2-\sqrt{x}}{x-4}$ f. $\displaystyle\lim_{x\mapsto4^+}\frac{8-x\sqrt{x}}{x-4}$

Indication pour la question f., déterminer les valeurs de a, b, c vérifiant la factorisation suivante :

$$64-x^3=(x-4)(a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c)$$

Exercice E.41

Déterminer les limites suivantes :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}x+\cos x$ b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{2+\cos x}{x}$

c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x+\sin x}{x+\cos x}$

Exercice E.42

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{2x^2+3x-1}{3x^3-2}$ b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto\frac{1}{2}^+}\frac{3x-2}{-2x^2+7x-3}$

c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-2^-}\frac{2x-\sqrt{x+3}}{2+x}$ d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto3}\frac{4x^2-12x+9}{-x^2+5x-6}$

e. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty}x-\sqrt{2x^2+1}$ f. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}x-\sqrt{2x^2+1}$

Exercice E.43

Déterminer, si possible, les limites ci-dessous :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x^2-3}{x-\sqrt{x}}$ b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto1^+}\frac{\frac{1}{x}-x^2}{x-1}$

c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto0^+}\frac{1}{x\sin x}$ d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\sqrt{x^2+1}-x$

e. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-3^-}\frac{\sqrt{6-x}-3}{2x^2+5x-3}$ f. $\displaystyle\lim_{x\mapsto0^+}\frac{1}{x-x\sqrt{x}}$

Exercice E.44

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x^5-2x^2}{x^2+\sqrt{x}}$ b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\sqrt{x^2-4}-x$

c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto4^-}\frac{4-2\sqrt{x}}{x-4}$ d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\sqrt{x^3+2}-x$

e. $\displaystyle\lim_{x\mapsto1^-}\frac{\sqrt{1-x}}{2x^2-4x+2}$

Exercice E.45

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty}-3x^4+2x$ b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\Big(\frac{6}{x^2}-\frac{1}{x}\Big)\Big(3x^2-2x\Big)$

c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x^6-3x^2}{3x^2+7x}$ d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{3x-\sqrt{x}}{2x+3}$

Exercice E.46

Donner si possible la valeur des limites suivantes; indiquer parmi celles-ci les formes indéterminées :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{1}{x-2}$ b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto2}\frac{2x+1}{3x^2-3x-2}$

c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-5}\frac{x^2}{(x+5)^2}$ d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-2^-}\frac{1}{\sqrt{-x-2}}$

e. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}x^2-x+1$ f. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-1^+}\frac{x-3}{2x+2}$

Exercice E.47

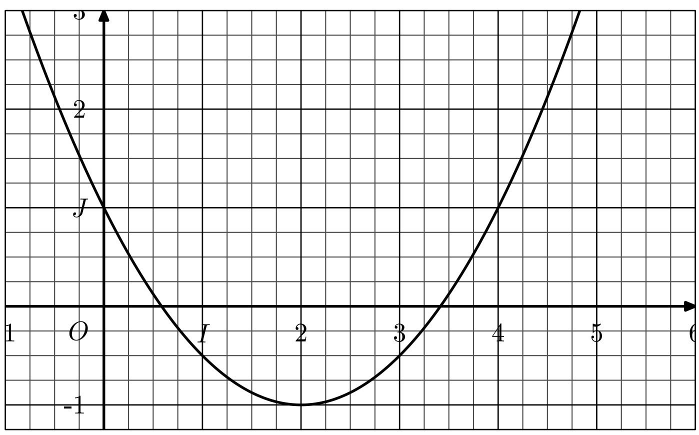
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f\colon x\longmapsto\frac{1}{2}{\cdot}x^2-2{\cdot}x+1$$

1. a. Montrer que, pour tout $h\in\mathbb{R}$, on a :
$$f(4+h)-f(4)=\frac{1}{2}{\cdot}h^2+2{\cdot}h$$

   b. Déterminer la valeur de la limite : $\displaystyle\lim_{h\mapsto0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}$

2. Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormal, on donne la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



   a. Tracer dans le repère ci-dessous, la droite (d) admettant pour équation réduite : $y=2x-7$

   b. Justifier que la droite (d) est une tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ dont on précisera le point de contact.

Exercice E.48

1. Déterminer l'expression des fonctions dérivées des fonctions suivantes :

a. $f(x) = \left(\cos x\right)^2$ b. $g(x) = \sin x + \cos x$

c. $h(x) = \tan(x^2+x)$ d. $j(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

2. Déterminer les limites suivantes :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0} \frac{\left(\cos x\right)^2 - 1}{x}$ b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto -\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{x + \dfrac{\pi}{4}}$

c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0} \frac{\tan(x^2+x)}{x}$ d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)\cdot \sin x}$

Exercice E.49

1. Le nombre dérivé de la fonction carré en 2 :

a. Pour $x \neq 2$, établir l'égalité suivante : $\dfrac{x^2 - 2^2}{x - 2} = x + 2$

b. Soit f la fonction carrée.

En déduire la valeur de la limite : $\displaystyle\lim_{x\mapsto 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$

2. Le nombre dérivée de la fonction inverse en 3 :

a. Pour $x \neq 3$, éetablir l'égalité suivante : $\dfrac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{3}}{x - 3} = -\dfrac{1}{3x}$

b. Soit g la fonction inverse.

En déduire la limite suivante : $\displaystyle\lim_{x\mapsto 3} \frac{g(x) - g(3)}{x - 3}$

3. Le nombre dérivée de la fonction racine carrée en 3 :

a. Pour $x \neq 2$, établir que : $\dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} = \dfrac{1}{\sqrt{x} + 2}$

b. Soit h la fonction racine carrée.

En déduire la valeur de la limite : $\displaystyle\lim_{x\mapsto 2} \frac{h(x) - h(2)}{x - 2}$

Exercice E.50

Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \sin x$

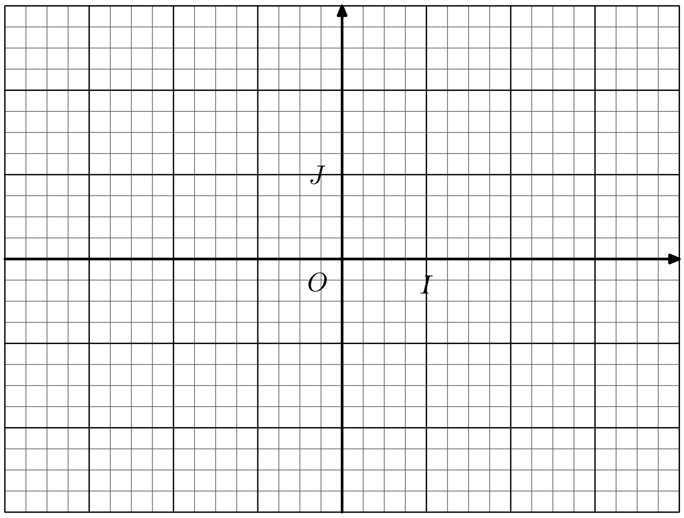
1. Donner le nombre dérivée de la fonction g en 0.

2. En déduire la valeur de la limite : $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0} \frac{\sin x}{x}$

Exercice E.51

Tracer dans le repère ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f admettant le tableau de valeurs et de nombres dérivés ci-dessous :

x	-4	-2	0	2	4
$f(x)$	$2{,}5$	-2	2	0	$-1{,}5$
$f'(x)$	-2	0	0	-1	$\dfrac{5}{4}$



Exercice E.52

1. On considère les deux fonctions u et v définies par :

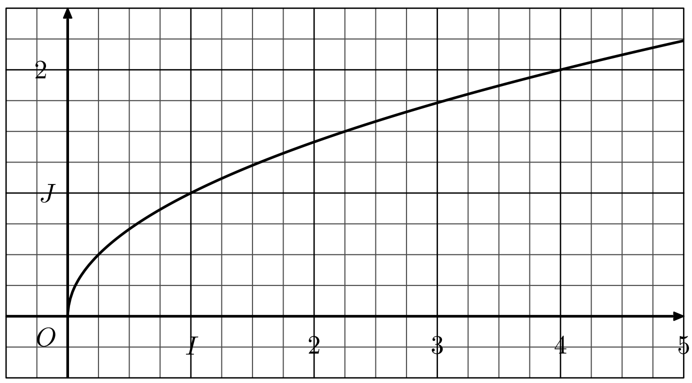
$$u(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \quad ; \quad v(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + 2}$$

a. A l'aide de la calculatrice, donner les valeurs approchées à 10^{-5} des images des nombres 4,1 et 4,01 par chacune des fonctions u et v.

b. Peut-on donner l'image de 4 par chacune de ces fonctions ?

c. Etablir l'égalité $u(x) = v(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{4\}$.

2. Ci-dessous est donnée la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction racine carrée dans le repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé.



a. Tracer la corde de la courbe $\mathscr{C}$ passant par les points d'abscisse 2 et 4. Justifier que son coefficient directeur est $u(2)$.

b. Voici un tableau "*presque*" de valeurs pour chacune des fonctions u et v :

x	4,41	4,0401	4,004001	4,00040001
$u(x)$	$\dfrac{0{,}1}{0{,}41}$	$\dfrac{0{,}01}{0{,}0401}$	$\dfrac{0{,}001}{0{,}004001}$	$\dfrac{0{,}0001}{0{,}00040001}$

x	4,41	4,0401	4,004001	4,00040001
$v(x)$	$\dfrac{1}{4{,}1}$	$\dfrac{1}{4{,}01}$	$\dfrac{1}{4{,}001}$	$\dfrac{1}{4{,}0001}$

Donner les valeurs approchées à 10^{-5} de toutes les images des deux lignes "$u(x)$" et "$v(x)$".

c. Quelle valeur peut-on conjecturer pour la limite :

$\displaystyle\lim_{x\mapsto 4} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{4}}{x - 4}$?

Exercice E.53

Déterminer les limites ci-dessous :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 1^+} \frac{x^2-3x+5}{x-1}$ b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 1^+} \frac{5-x}{1-x}$

c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0^-} \frac{x^2+x+1}{x}$ d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0^+} \frac{x-1}{-x^3}$

Exercice E.54

Déterminer la valeur des limites suivantes :

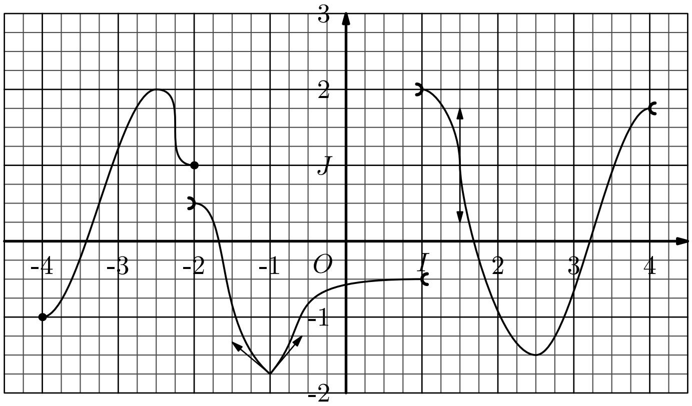
a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto +\infty} x+\frac{1}{x}$ b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto +\infty} (x+1)\Big(1+\frac{1}{x}\Big)$

c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto -\infty} x^2-x+2$ d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto -\infty} (x+2)(1-x)$

e. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0^-} x+\frac{1}{x}$ f. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 1^+} \frac{x-1}{x}+\frac{x}{x-1}$

Exercice E.55

Ci-dessous est donnée la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f ; cette courbe admet une tangente verticale au point d'abscisse 1,5 :



1. Déterminer graphiquement l'ensemble de définition de la fonction f.

2. Déterminer graphiquement l'ensemble de dérivabilité de la fonction f.

3. Déterminer les limites suivantes :

   a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto -2^-} f(x)$ b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto -2^+} f(x)$

   c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 1^-} f(x)$ d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 1^+} f(x)$

4. a. Combien existe-t-il de nombres a tels que :
   $\displaystyle\lim_{x\mapsto a^-} f(x) \neq \lim_{x\mapsto a^+} f(x)$

   b. Quelle particularité graphique ont les points d'abscisse a vérifiant une telle condition ?

Exercice E.56

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par la relation :

$$f(x)=\frac{|x|}{x}$$

1. Justifier que la fonction h n'est pas continue en 0.

2. Déterminer les deux limites suivantes :
   $\displaystyle\lim_{\substack{x\mapsto 0^-\\ x\neq 0}} f(x)$; $\displaystyle\lim_{\substack{x\mapsto 0^+\\ x\neq 0}} f(x)$

Exercice E.57

1. On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :

   $$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$$

   a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

   b. Déterminer la valeur des deux limites suivantes :
   $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0^-} f(x)$; $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0^+} f(x)$

   c. Peut-on dire que la fonction f est continue en 0 ?

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$\begin{cases} g(x)=f(x) & \text{pour } x\neq 0\\ g(0)=0 \end{cases}$$

   Justifier que la fonction f est continue en 0.

Exercice E.58

On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=\frac{3x-1}{6x^2-11x+3}$$

1. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}_f$ de définition de la fonction f.

2. Est-il possible de **prolonger par continuité** la fonction f en $\frac{1}{3}$ afin qu'elle soit continue en cette valeur ? C'est à dire existe-t-il un nombre a telle que la fonction g suivante soit continue en $\frac{1}{3}$:

   $$\begin{cases} g(x)=\dfrac{3x-1}{6x^2-11x+3} & \text{pour } x\in\mathcal{D}_f\\[2mm] g\Big(\dfrac{1}{3}\Big)=a & \text{pour } x=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Exercice E.59

1. a. Expliquer pourquoi la limite suivante est une forme indéterminée :

   $$\lim_{x\mapsto +\infty} x^2-x+1$$

   b. En justifiant l'égalité ci-dessous, donner la valeur de la limite de la question précédente :

   $$x^2-x+1=x^2\Big(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\Big)$$

2. a. Expliquer pourquoi la limite suivante est une forme indéterminée :

   $$\lim_{x\mapsto +\infty} \frac{2x^2+2x+1}{3x^2-2}$$

   b. En justifiant l'égalité ci-dessous, donner la valeur de la limite de la question précédente :

   $$\frac{2x^2+2x+1}{3x^2-2}=\frac{x^2\Big(2+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\Big)}{x^2\Big(3-\dfrac{2}{x^2}\Big)}$$

3. La limite ci-dessous est une forme indéterminée ; à l'aide d'une transformation adéquate, déterminer la valeur de cette limite :

   $$\lim_{x\mapsto +\infty} \frac{-2x^2+1}{2x+1}$$

Exercice E.60

Préciser pour chacune des limites suivantes, lesquelles présentent une forme indéterminée :

a. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{x^2+2\cdot x-1}$

b. $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} \dfrac{x^2+2\cdot x}{x^3-x^2}$

c. $\lim\limits_{x\mapsto 2^+} \sqrt{x^2-x-2}\cdot(x-2)$

d. $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} \dfrac{x-1}{x^2+x}$

e. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} x^3-2x^2+1$

f. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x^3-2x^2+1$

Exercice E.61

On considère la fonction f définie par :

$$f : x \longmapsto \frac{x^2+5x-6}{x-1}$$

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Déterminer les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$.
3. a. Justifier que les deux limites ci-dessous représentent une forme indéterminée :
   $$\lim_{x\mapsto 1^-} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\mapsto 1^+} f(x)$$
   b. Montrer que, pour $x\in\mathcal{D}_f$, on a : $f(x)=x+6$
   c. En déduire la valeur des deux limites présentées à la question a..

Exercice E.62

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} 2\cdot x^2+3\cdot x$

b. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} -3\cdot x^3+\dfrac{2}{x}$

c. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} 5\cdot x^2-3\cdot x^3$

d. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x^2+2\cdot x-(x+2)^2$

e. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} x^2+3\cdot x$

f. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} x^3-2\cdot x^2$

Exercice E.63

On considère la fonction f définie par :

$$f : x \longmapsto \frac{5x+1}{-5x^2+4x+1}$$

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Déterminer les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$.
3. a. Justifier que les deux limites ci-dessous représentent une forme indéterminée :
   $$\lim_{x\mapsto -\frac{1}{5}^-} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\mapsto -\frac{1}{5}^+} f(x)$$
   b. Montrer que, pour $x\in\mathcal{D}_f$, on a : $f(x)=-\dfrac{1}{x-1}$
   c. En déduire la valeur des deux limites présentées à la question a..

Exercice E.64

Déterminer la valeurs des limites ci-dessous :

a. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x^2-x$

b. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} x^2+x^3$

c. $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} x\Big(1+\dfrac{1}{x}\Big)$

d. $\lim\limits_{x\mapsto 2^-} \dfrac{5}{(x-2)^2}-\dfrac{3}{x-2}$

e. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} x^3+x-2$

f. $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} \dfrac{x^2+1}{x}-\dfrac{x+1}{x}$

Exercice E.65

On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :

$$f(x)=\frac{2\cdot x^3-x}{x^3+2\cdot x^2}$$

1. Etablir les égalités suivantes :
   $$f(x)=\frac{2-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{2}{x}}=\frac{2\cdot x^2-1}{x\cdot(x+2)}$$
2. Déterminer la valeur des limites suivantes :
   $$\lim_{x\mapsto+\infty} f(x) \quad ; \quad \lim_{x\mapsto 0^+} f(x)$$

Exercice E.66

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto 2^+} \dfrac{2-x}{2\cdot x^2-x-6}$

b. $\lim\limits_{x\mapsto 3^-} \dfrac{x-3}{2\cdot x^2-15\cdot x+27}$

c. $\lim\limits_{x\mapsto 1^-} \dfrac{-3\cdot x^2+7\cdot x-4}{(x-1)^2}$

d. $\lim\limits_{x\mapsto -2^+} \dfrac{3\cdot x^2+5\cdot x-2}{x^2+7\cdot x+10}$

Exercice E.67

Déterminer la valeur de chacune des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{3x^2-x+1}{5x^2}$

b. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \dfrac{2x+1}{3x^3-x+1}$

c. $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} \dfrac{x^{16}-x^3+x}{x^3-x^2}$

d. $\lim\limits_{x\mapsto 0^-} \dfrac{x^5-x^4}{x^6-2\cdot x^4}$

e. $\lim\limits_{x\mapsto 2^+} \dfrac{1}{x^2-x-2}$

f. $\lim\limits_{x\mapsto 3^-} \dfrac{x^2-6x+9}{x^2-9}$

Exercice E.68

1. On considère la fonction f définie par :
   $$f\colon x \longmapsto \frac{3x^2+5x}{3x^3+4x+1}$$
   a. Etablir l'égalité suivante :
   $$\frac{3x^2+5x}{3x^3+4x+1}=\frac{3+\dfrac{5}{x}}{x\cdot\Big(3+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\Big)}$$
   b. En déduire la valeur de la limite : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$.
2. On considère la fonction g définie par :
   $$g\colon x \longmapsto \frac{4x^3+2x+1}{2x^3-2x^2}$$
   Par un raisonnement analogue à la question précédente, établir l'égalité suivante : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} g(x)=2$

Exercice E.69

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} \dfrac{1}{x}$

b. $\lim\limits_{x\mapsto 0^-} \dfrac{1}{x}$

c. $\lim\limits_{x\mapsto 0^-} \dfrac{3}{x^2}$

d. $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} \dfrac{x^3+2\cdot x}{x^2+x}$

e. $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} \dfrac{-2\cdot x^2}{x^4+x^3}$

f. $\lim\limits_{x\mapsto 0^-} \dfrac{-2\cdot x^2}{x^4+x^3}$

Exercice E.70

On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x)=\frac{x^2+3\cdot x}{2\cdot x^2-10\cdot x+12}$$

1. Etablir les égalités suivantes :

$$f(x) = \dfrac{1+\dfrac{3}{x}}{2-\dfrac{10}{x}+\dfrac{12}{x^2}} = \dfrac{x{\cdot}(x+3)}{(x-2)(2{\cdot}x-6)}$$

2. Dresser le tableau de signe de l'expression $(x-2)(2x-6)$.

3. En déduire la valeur des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)$ b. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$ e. $\lim\limits_{x\mapsto2^-} f(x)$

f. $\lim\limits_{x\mapsto2^+} f(x)$ c. $\lim\limits_{x\mapsto3^-} f(x)$ d. $\lim\limits_{x\mapsto3^+} f(x)$

Exercice E.71

Déterminer la valeur de chacune des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto2^+} \dfrac{1}{2{\cdot}x^2-5{\cdot}x+2}$ b. $\lim\limits_{x\mapsto2^+} \dfrac{1}{2{\cdot}x^2-12{\cdot}x+16}$

c. $\lim\limits_{x\mapsto-1^-} \dfrac{x+4}{3x^2-x-4}$ d. $\lim\limits_{x\mapsto1^-} \dfrac{x^2+x-3}{3{\cdot}x^2-7{\cdot}x+4}$

Exercice E.72

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{x^2+2}{x+1}$ b. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \dfrac{x-3}{2{\cdot}x^2-3}$

c. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \dfrac{4{\cdot}x^2-3{\cdot}x+2}{-3{\cdot}x^2}$ d. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \dfrac{x^5+x^4}{x^3-x}$

e. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{5{\cdot}x^4-2{\cdot}x^3}{3{\cdot}x^2-2}$ f. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{2{\cdot}x^{10}+x}{6{\cdot}x^{10}-2{\cdot}x^3}$

Exercice E.73

Déterminer l'expression des fonctions dérivées des fonctions polynomiales suivantes :

1. $f\colon x\longmapsto -3x+2$
2. $g\colon x\longmapsto 4x^2-4$
3. $h\colon x\longmapsto 2x^2+3x$
4. $j\colon x\longmapsto 5x^3-2x^2$
5. $k\colon x\longmapsto -2x^2+2x$
6. $\ell\colon x\longmapsto (3x+11)(4-x)$

Exercice E.74

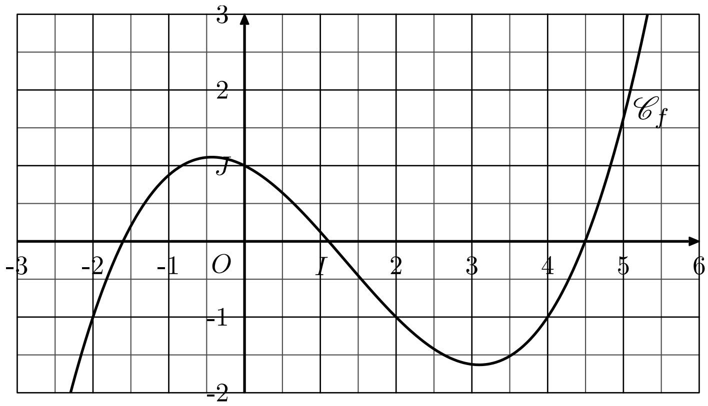
Déterminer l'expression des fonction dérivées des fonctions polynomiales suivantes :

1. $f\colon\longmapsto 3x+2$
2. $g\colon\longmapsto x^2+4$
3. $h\colon\longmapsto x^2+x$
4. $j\colon\longmapsto x^3+2x^2$
5. $k\colon\longmapsto 3x^2-2x$
6. $\ell\colon\longmapsto (x+1)(2x-4)$

Exercice E.75

On considère la fonction f dont l'image de x est définie par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$$



On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. Donner l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.

2. On considère la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.

   a. Donner la valeur du coefficient directeur de (T).

   b. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T).

   c. Dans le repère ci-dessous, tracer la tangente (T).

3. On considère la droite (d) admettant l'équation réduite :
   $(d)\colon\ y = -x+1$
   Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la droite (d) et de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Exercice E.76

Déterminer les fonctions dérivées associées aux fonctions suivantes :

a. $f\colon x\longmapsto x-2\sqrt{x}$ b. $g\colon x\longmapsto 2\times\dfrac{1}{x}$

c. $h\colon x\longmapsto \dfrac{-5}{x}+\sqrt{x}$ d. $k\colon x\longmapsto x^2-\dfrac{1}{x}$

Exercice E.77

Déterminer l'expression de la dérivée de chacune des fonctions ci-dessous :

1. $f\colon x\longmapsto x-\dfrac{1}{x}$
2. $g\colon x\longmapsto 2{\cdot}\sqrt{x}$
3. $h\colon x\longmapsto \dfrac{3}{x}-2\sqrt{x}$
4. $j\colon x\longmapsto 2x^3+\dfrac{2}{x}$

On présentera l'expression des dérivées sous la forme d'un quotient.

Exercice E.78

Déterminer l'expression des dérivées des fonctions suivantes :

a. $f(x) = 3x^2$ b. $g(x) = \dfrac{1}{12}x^6$ c. $h(x) = 4\sqrt{x}$

d. $j(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2}$ e. $k(x) = \dfrac{1}{2x}$ f. $l(x) = -\dfrac{2}{x}$

Exercice E.79

Déterminer l'expression de la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a. $f : x \longmapsto 3x^2 + 5x$

b. $g : x \longmapsto \dfrac{3}{x} + 2\sqrt{x}$

c. $h : x \longmapsto 5x^3 - \dfrac{3}{x}$

d. $j : x \longmapsto \dfrac{8x^3 - 2x^2}{x}$

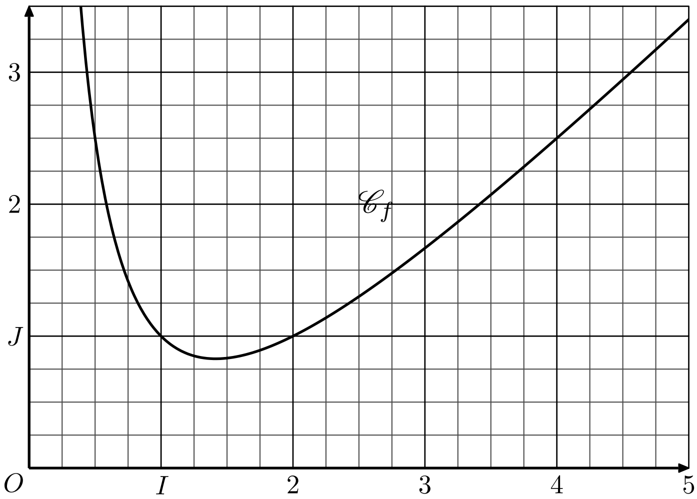
Les dérivées des fonctions g et h seront présentées sous forme de quotient.

Exercice E.80

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par la relation :

$$f(x) = x + \frac{2}{x} - 2$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f est donnée ci-dessous dans un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé :



1. Montrer que la fonction f admet pour dérivée la fonction f' dont l'expression est donnée par :
$$f'(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2}$$

2. On souhaite déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.
   a. Donner le coefficient directeur de la tangente (T). Justifier votre démarche.
   b. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T).
   c. Tracer la droite (T) dans le repère ci-dessus.

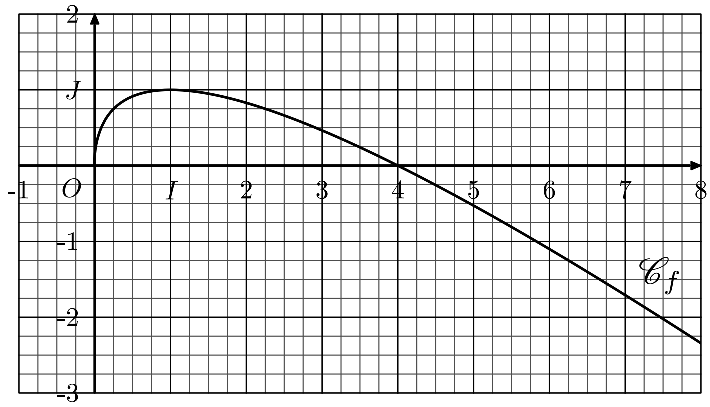
3. On considère la droite (d) d'équation réduite :
$$(d) : \; y = \frac{1}{2} \cdot x$$
   a. Sur $]0\,;+\infty[$, étudier le signe de l'expression :
$$f(x) - \frac{1}{2} \cdot x$$
   b. En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite (d).

Exercice E.81

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$f(x) = -x + 2\sqrt{x}$$

Dans le repère $(O\,;I\,;J)$ ci-dessous, est donnée la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f.



1. a. Montrer que la fonction f admet pour dérivée, sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction f' dont l'expression est donnée par :
$$f'(x) = \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$
   b. Déterminer la valeur des nombres dérivées de la fonction f en $\dfrac{1}{4}$ et en 4.

2. On note (d) et (Δ) les tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ aux points d'abscisse respectifs $\dfrac{1}{4}$ et 4.
   a. Déterminer les équations réduites des tangentes (d) et (Δ).
   b. Montrer que les deux droites (d) et (Δ) s'interceptent au point de coordonnées $\left(1\,;\dfrac{3}{2}\right)$.
   c. Tracer sur le graphique les droites (d) et (Δ).

Exercice E.82

1. Donner l'équation réduite de la tangente à la courbe de la fonction carrée au point d'ascisse -2.
2. Donner l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction inverse au point d'abscisse 3.

Exercice E.83

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = 4x^2 - 4x - 3$$

1. Calculer le nombre dérivé de la fonction f en 2.
2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.

Exercice E.84

1. Etablir l'égalité algébrique suivante pour $x \in \mathbb{R}^*$:
$$\frac{x}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} = x\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}\right)$$
2. En déduire la valeur de la limite :
$$\lim_{x \mapsto 0^+} \frac{x}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} = 0$$

Exercice E.85

Chacune des limites ci-dessous présente une forme indéterminée. Démontrer le résultat attendu en mettant en évidence la bonne transformation algébrique :

a. $\lim\limits_{x\mapsto 0^-} \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}=+\infty$ b. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{5x^2+3}{2x^2-3x+1}=\dfrac{5}{2}$

c. $\lim\limits_{x\mapsto 1^-}\dfrac{1-x}{\sqrt{1-x}}=0$ d. $\lim\limits_{x\mapsto 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}=1$

e. $\lim\limits_{x\mapsto 1^-}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=2$ f. $\lim\limits_{x\mapsto -\frac{2}{3}^+}\dfrac{2x-1}{3x+2}\cdot\sqrt{3x+2}=-\infty$

Exercice E.86

Chacune des limites ci-dessous représente une forme indéterminée; effectuer les transformations algébriques adéquates pour déterminer chacune de ses limites :

a. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x\sqrt{x}-x$ b. $\lim\limits_{x\mapsto 1^+}\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x^2+x-2}$

c. $\lim\limits_{x\mapsto 2^-}\dfrac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$ d. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{2x^2+x-2}$

Exercice E.87

Déterminer la valeur de chacune des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto 1^+}\dfrac{1-x}{\sqrt{x+3}-2}$ b. $\lim\limits_{x\mapsto -1^+}\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2+4x+3}$

Exercice E.88

1. Montrer que, pour $x\in\left]-\infty\,;-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right[$, on a :

$$\sqrt{3x^2-1}+x=x\cdot\left(1-\sqrt{3-\frac{1}{x^2}}\right)$$

2. En déduire la valeur de la limite suivante :
$\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\sqrt{3x^2-1}+x$

Exercice E.89

On considère la fonction f définie par la relation :

$$f : x\longmapsto\frac{\sqrt{x^3+x^2}}{x}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. a. Pour $x\in\big[-1\,;0\big[$, établir l'égalité : $f(x)=-\sqrt{x+1}$
   b. Déterminer la valeur de la limite $\lim\limits_{x\mapsto 0^-} f(x)$.
3. Déterminer la valeur de la limite $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} f(x)$.
4. Peut-on parler de la limite de la fonction f en 0.

Exercice E.90

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{2\cdot x^3+x-2}{-x^2-2}$ b. $\lim\limits_{x\mapsto 0^+}\dfrac{3\cdot x^3-2\cdot x^2}{x^4+x^3}$

c. $\lim\limits_{x\mapsto 3^+}\dfrac{x-6}{2x^2-15x+27}$ d. $\lim\limits_{x\mapsto -1^+}\dfrac{2x^2+5x+3}{-x^2+x+2}$

e. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}$ f. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{4\cdot x^2-3x+1}}$

Exercice E.91

Déterminer la valeur de chacune des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{3x^6+2x^3}{2x^8-x^3}$ b. $\lim\limits_{x\mapsto 0}\dfrac{3x^5-x^3}{x^4+x^3}$

c. $\lim\limits_{x\mapsto 3^+}\dfrac{1}{-2x^2+4x+6}$ d. $\lim\limits_{x\mapsto 2^+}\dfrac{x^2-3x+2}{-3x^2+5x+2}$

e. $\lim\limits_{x\mapsto 3^-}\dfrac{\sqrt{3-x}}{2x^2-5x-3}$ f. $\lim\limits_{x\mapsto 1^-}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{5-x}-2}$

Exercice E.92

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\dfrac{x^4-3x}{2x^2-4x^4}$ b. $\lim\limits_{x\mapsto -2^+}\dfrac{x-1}{2x^2+5x+2}$

c. $\lim\limits_{x\mapsto 2^+}\dfrac{4-2x}{3x^2-4x-4}$ d. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{x-1}$

Exercice E.93

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto 0^+}\dfrac{1}{x-x^2}$ b. $\lim\limits_{x\mapsto -1^+}\dfrac{x^2+6x+3}{2\cdot x^2+x-1}$

c. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{3x^2+14x-4}{x+5}-3x+1$ d. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

Exercice E.94

En observant chacun des tableau de variations ci-dessous, écrire les limites correspondantes aux bornes de son ensemble de définition et préciser ci la fonction admet des asymptotes horizontales ou verticales :

a.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Variation de f	3 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$-\infty$

b.

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
Variation de f	$-\infty$ ↗	-1	‖	-1 ↗	$+\infty$

c.

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
Variation de f	0 ↘	$-\infty$	‖	2 ↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

Exercice E.95

1. a. Etudier la limite suivante :

$$\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x^2+3x-2}{2(x+1)}-\frac{1}{2}x-1$$

   b. Donner l'équation de l'asymptote oblique de la fonction f en $+\infty$ définie par :

$$f(x)=\frac{x^2+3x-2}{2(x+1)}$$

2. a. Déterminer les valeurs de a et de b afin que :

$$a\cdot x+b+\frac{2}{x+2}=\frac{-6x^2-11x+8}{3(x+2)}$$

   b. Déterminer l'équation de l'asymptote oblique en $+\infty$ de la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{-6x^2 - 11x + 8}{3(x+2)}$$

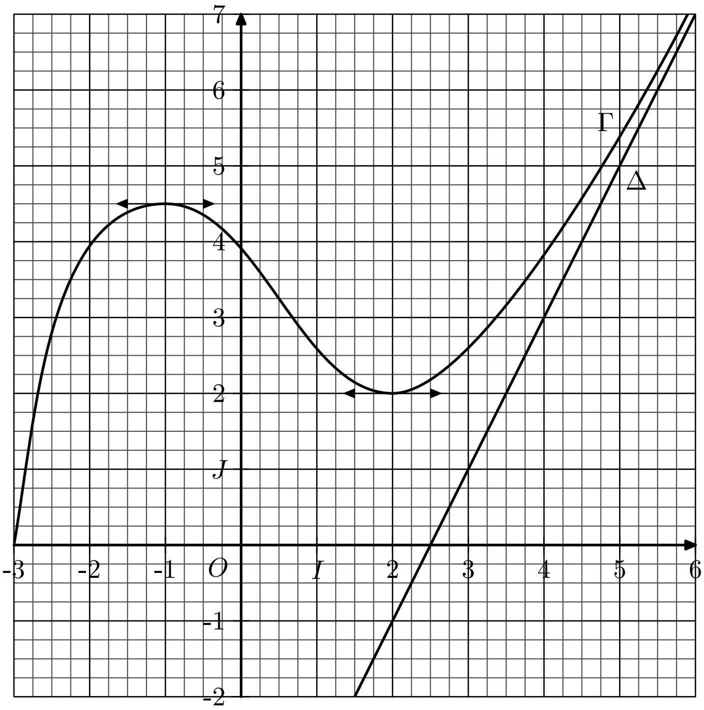
Exercice E.96

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-3\,;+\infty[$, croissante sur les intervalles $[-3\,;-1]$ et $[2\,;+\infty[$ et décroissante sur l'intervalle $[-1\,;2]$.

On note f' sa fonction dérivée sur l'intervalle $[-3\,;+\infty[$.

La courbe Γ représentative de la fonction f est tracée ci-dessous dans un repère orthogonal $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.

Elle passe par le point $A\left(-3\,;0\right)$ et admet pour asymptote la droite Δ d'équation $y=2x-5$



Les réponses ne seront pas justifiées.

Notation : une réponse exacte rapporte 0,5 *point ; une réponse inexacte enlève* 0,25 *point l'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est* 0.

1. L'équation $f(x)=4$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $[-3\,;+\infty[$.

2. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x) = +\infty$

3. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \left|f(x) - (2x-5)\right| = +\infty$.

4. $f'(0) = 1$

5. $f'(x)>0$ pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[-2\,;1]$

Exercice E.97

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{4x-4}{x+1}}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

2. Etudier les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

3. Préciser si la courbe $\mathscr{C}_f$, représentative de la fonction f admet des asymptotes ; on précisera leurs caractéristiques.

Exercice E.98

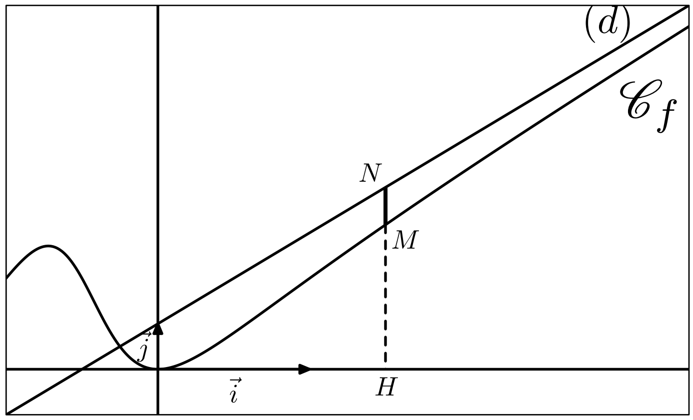
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et dont l'image d'un nombre réel x est donnée par la relation :

$$f(x) = \frac{2x^2(2x+3)}{2x^2+2x+1}$$

1. a. Déterminer les deux nombres réels a et b vérifiant la relation :
$$f(x) = a{\cdot}x + b - \frac{4x+1}{2x^2+2x+1}$$

   b. Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f admet une asymptote oblique (d) en $+\infty$ et en $-\infty$ dont on précisera l'équation réduite.

2. Voici une représentation de cette courbe et de son asymptote oblique :



On considère le point M de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x et N est le point de la droite (d) d'abscisse x.
Le point H est la projection orthogonale de ces deux points sur l'axe des ordonnées ; il a pour coordonnée $H\left(x\,;0\right)$.

Dans les prochaines questions, on étudie la distance MN pour des valeurs de x appartenant à $\mathbb{R}^+$:

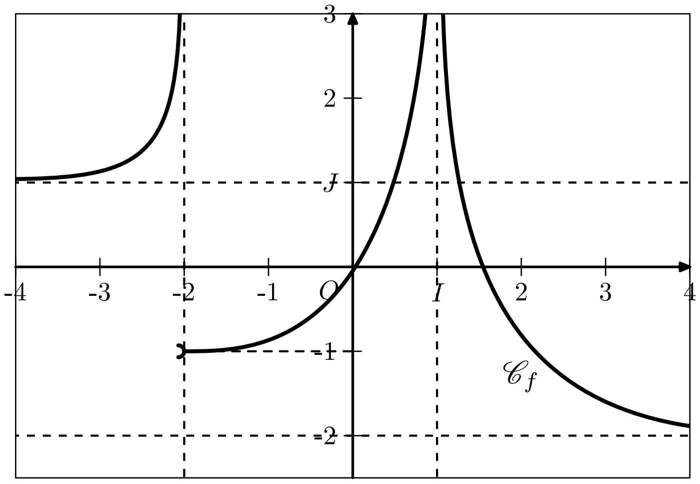
   a. Exprimer la distance MN en fonction de x.

   b. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}^+$, on a :
$$\left|\frac{4x+1}{2x^2+2x+1}\right| \leqslant \frac{2}{x}$$
Indication : on pourra se servir du fait que chaque terme est positif sur $\mathbb{R}^+$

   c. En déduire l'existence d'un intervalle de la forme $[a\,;+\infty[$ sur lequel $MN\leqslant 10^{-6}$.

Exercice E.99

Ci-dessous est représentée la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur l'intervalle $\left[-4\,;4\right]$:



Les asymptotes horizontales et verticales à la courbe $\mathscr{C}_f$ a été représentées en pointillés.

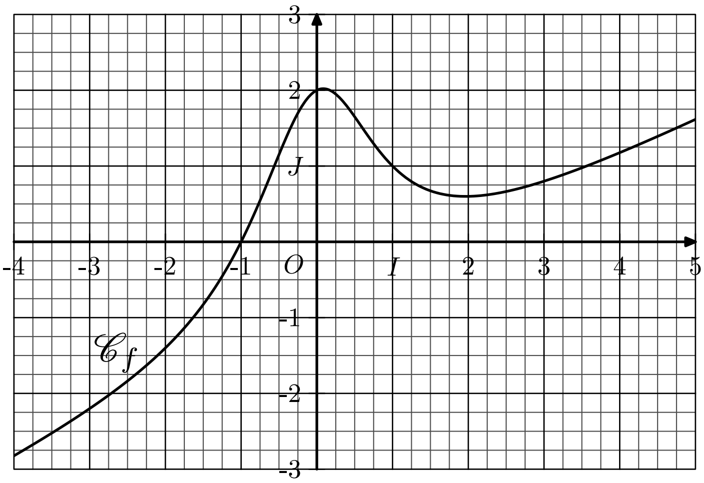
Dresser le tableau de variation complet de cette fonction.

Exercice E.100

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image d'un nombre réel x est définie par la relation :

$$f(x)=\frac{x^3-2x^2+x+4}{2(x^2+1)}$$

On donne ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f dans le repère $(O\,;I\,;J)$:



1. a. Déterminer trois réels a, b et c vérifiant la relation :
$$f(x)=a{\cdot}x+b+\frac{c}{x^2+1}$$
   b. En déduire l'équation de l'asymptote oblique (Δ) à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$ et en $+\infty$
   c. Tracer la droite (Δ)

2. On considère une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ a pour position relative avec $\mathscr{C}_f$:
$\mathscr{C}_g$ est en dessous de $\mathscr{C}_f$ sur $]-\infty\,;1[$;
$\mathscr{C}_g$ est au dessus de $\mathscr{C}_f$ sur $]1\,;+\infty[$.
   a. Effectuer le tracé d'une fonction g vérifiant les conditions ci-dessus.
   b. Faire une conjecture quant à la valeur des deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto-\infty} g(x) \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} g(x)$$

Exercice E.101

En traçant la courbe représentative de fonctions à l'aide de la calculatrice ou de logiciel de tracer, émettre une conjecture sur l'ensemble de définition et sur les asymptotes à la courbe de chacune des fonctions ci-dessous :

a. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ b. $g(x)=\dfrac{x+1}{x^2-1}$

c. $h(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x-1}$ d. $j(x)=\dfrac{(x^2{+}1)\sqrt{x^2{-}2x{+}1}}{x-1}$

Exercice E.102

On considère la fonction f dont l'image de x est définie par la relation :

$$f(x)=\frac{4x^2+10x-2}{x+3}$$

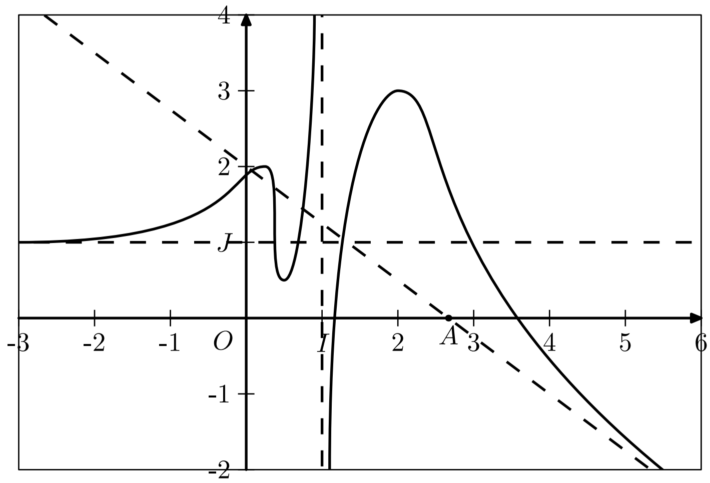
1. Déterminer les limites de cette fonction aux bornes de son ensemble de définition.

2. a. Déterminer la valeur des trois nombres réels a, b, c vérifiant :
$$a{\cdot}x+b+\frac{c}{x+3}=\frac{4x^2+10x-2}{x+3}$$
   b. En déduire une expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
   c. Dresser le tableau de variation complet de la fonction f *(n'oubliez aucune valeur dans le tableau).*

3. Déterminer l'équation de l'asymptote oblique en $+\infty$.

Exercice E.103

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on a représenté la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie sur $[-3\,;6]\backslash\{1\}$



Les asymptôtes à la courbe $\mathscr{C}_f$ sont représentés en pointillées.

1. Préciser la nature et l'équation de chacune des asymptôtes à la courbe $\mathscr{C}_f$.

2. Donner la valeur de chacune des limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto-\infty} f(x) \quad ; \quad \lim_{x\mapsto1^+} f(x) \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} f(x)$$

Exercice E.104

1. On considère la fonction f définie dont l'image d'un nombre x est défini par :
$$f(x)=\frac{6x^3+x^2+7x+9}{2x^2-x+3}$$
Montrer que la droite (d) d'équation $y=3x+2$ est l'asymptôte à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$ et $+\infty$.

2. On considère la fonction g définie par la relation :

$$g(x) = \frac{4x^2 - 8x + 5}{3 - 2x}$$

Déterminer les valeurs des nombres réels a et b vérifiant :

$$\lim_{x \mapsto +\infty} \big[g(x) - (a{\cdot}x + b) \big] = 0$$

Exercice E.105

Soit f a fonction définie sur $\left]0\,;+\infty\right[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2{\cdot}x}$$

et soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\big(O\,;I\,;J\big)$.

1. a. Etudier les variations de f sur l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$.

   b. Préciser les équations des asymptotes de $\mathscr{C}$ *(pour déterminer l'une de ces asymptotes, on étudiera* $\displaystyle\lim_{x \mapsto +\infty} \Big(f(x) - \frac{x}{\sqrt{3}}\Big)$*)*.

   c. Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

2. a. Soit m un nombre réel et soit Δ la droite d'équation $y = m$. Discuter, suivant les valeurs de m, le nombre de points d'intersection de Δ et de $\mathscr{C}$.

   b. Pour tout $m > \sqrt{2}$, on appelle A et B les points d'intersection de Δ et de $\mathscr{C}$. Soit I le milieu du segment $[AB]$. Montrer que, quand m décrit l'intervalle $\left]\sqrt{2}\,;+\infty\right[$, I décrit une partie, que l'on précisera, de la droite D d'équation $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}{\cdot}y$.

Exercice E.106

On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est défini par :

$$f(x) = \frac{8x^2 - 2x - 5}{2x + 1}$$

1. Déterminer la valeur des réels a, b, c vérifiant l'égalité :

$$f(x) = a{\cdot}x + b + \frac{c}{2x+1} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \backslash \Big\{-\frac{1}{2}\Big\}$$

2. Justifier que la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f admet une asymptote oblique dont on précisera l'équation.

Exercice E.107

On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est donnée par la relation :

$$f(x) = \frac{6x^2 + x + 1}{2x + 1}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

   a. Déterminer l'expression de la fonction dérivée de f.

   b. Dresser le tableau de signe de la fonction f'.

   c. En déduire le tableau de variation de la fonction f.

   d. En étudiant les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition, compléter le tableau de variation.

2. Montrer que la fonction f admet en $-\infty$ et en $+\infty$ la droite (d) d'équation $y = 3x - 1$ pour asymptote oblique.

Exercice E.108

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation suivante :

$$f(x) = -2x^2 - 4x + 6$$

1. a. Déterminer la forme factorisée de l'expression $f(x)$.

   b. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
   (On indiquera également les deux racines de la fonction f)

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ admettant le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		8		$+\infty$
Variation de g	-1	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

   a. Faire une conjecture sur la valeur des limites suivantes :

$$\lim_{x \mapsto +\infty} \big(g \circ f\big)(x) \quad ; \quad \lim_{x \mapsto -\infty} \big(f \circ g\big)(x)$$

   b. Justifier que la fonction $f \circ g$ est décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty\,;0\right[$.

   c. Justifier et préciser la monotonie de la composée $g \circ f$ sur chacun des deux intervalles suivants :

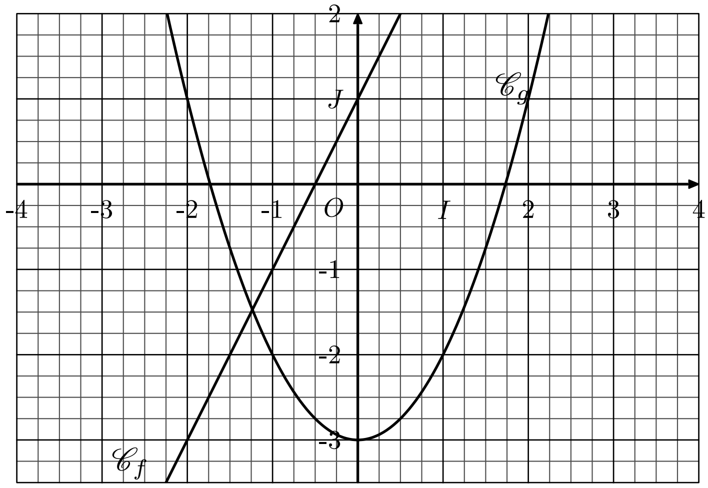
$$\left]-\infty\,;-3\right] \quad ; \quad \left[-3\,;1\right]$$

Exercice E.109

On considère les deux fonctions f et g définie sur $\left[-4\,;4\right]$ par les relations :

$$f(x) = 2x + 1 \quad ; \quad g(x) = x^2 - 3$$

On donne les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives des fonctions f et g dans le repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ ci-dessous :



1. Par lecture graphique, compléter les tableaux de valeurs suivants :

x	$-\dfrac{3}{2}$	-1	$-\dfrac{1}{2}$	0	$\dfrac{1}{2}$
$f(x)$					

x	-2	-1	0	1	2
$g(x)$					

2. On considère le programme de calcul suivant :

> Prendre un nombre x ;
>
> Déterminer l'image de x par la fonction f ; on note ce nombre x' ;
>
> Déterminer l'image de x' par la fonction g ; on note ce nombre $g\big(f(x)\big)$.
>
> On peut noter ce programme de calcul par la chaine :
>
> $$x \xhookrightarrow{f} f(x) \xhookrightarrow{g} g\big(f(x)\big)$$

a. Déterminer la valeurs des expressions suivantes :

$$g\big(f(-1)\big) \quad ; \quad g\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

b. Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$g\big(f(x)\big)$					

On vient de créer une nouvelle fonction qui à un nombre x associe l'image $g\big(f(x)\big)$. Cette fonction s'appelle la fonction composée de f par g et se note $g\circ f$.

3. Tracer dans le repère ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_{g\circ f}$ représentative de la fonction $g\circ f$.

4. Donner l'expression, en fonction de x, de la fonction $g\circ f$.

Exercice E.110

Pour chaque question, déterminer une expression "*simplifiée*" de l'expression de la composée $f\circ g$ de la fonction g par la fonction f :

a. $f(x) = 1 \quad ; \quad g(x) = 3x - 2$

b. $f(x) = 1 \quad ; \quad g(x) = 4x^2 + 12x + 11$

c. $f(x) = 1 \quad ; \quad g(x) = \dfrac{3x+1}{2-x}$

d. $f(x) = 1 \quad ; \quad g(x) = \sqrt{x}$

d. $f(x) = 1 \quad ; \quad g(x) = \dfrac{1}{x}$

Exercice E.111

Pour chaque question, déterminer la limite de $g\circ f$ en a :

a. $f(x) = 2x^2 - 5x - 3 \quad ; \quad g(x) = \dfrac{5-x}{x^2} \quad ; \quad a = 3$

b. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x+3}} \quad ; \quad g(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \quad ; \quad a = -3$

c. $f(x) = \dfrac{\cos x - 2}{x} \quad ; \quad g(x) = \dfrac{x^3 + 2x}{x^3 + x^2} \quad ; \quad a = +\infty$

Exercice E.112

On considère les fonction numériques f et g dont le tableau de variation est donné ci-dessous :

x	-1		3		4		$+\infty$
Variation de f	‖ 0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
Variation de g	$-\infty$	↗	3	↘	1 ‖ $+\infty$	↘	4

1. Préciser l'ensemble de définition pour chacune de ces deux fonctions.

2. Justifier que la fonction f admet un unique zéro.

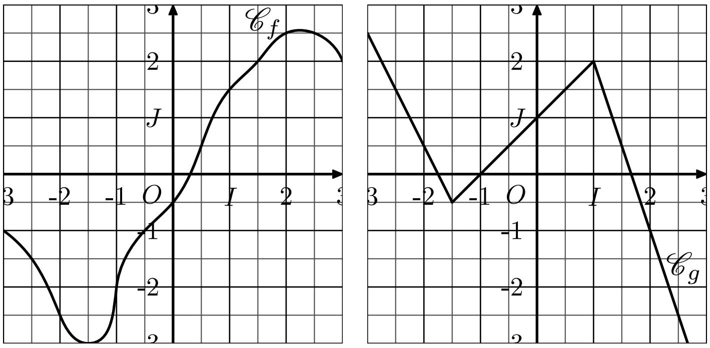
3. Déterminer et justifier la valeur des limites suivantes :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 4^-} (g\circ f)(x)$ b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto +\infty} (g\circ f)(x)$

c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto +\infty} (g\circ f\circ g)(x)$ d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto -1} (f\circ g)(x)$

Exercice E.113

On considère deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[-3\,;3]$ dont les courbes, respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, représentatives sont données dans un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ orthonormée :



1. Déterminer la valeur des expressions suivantes :

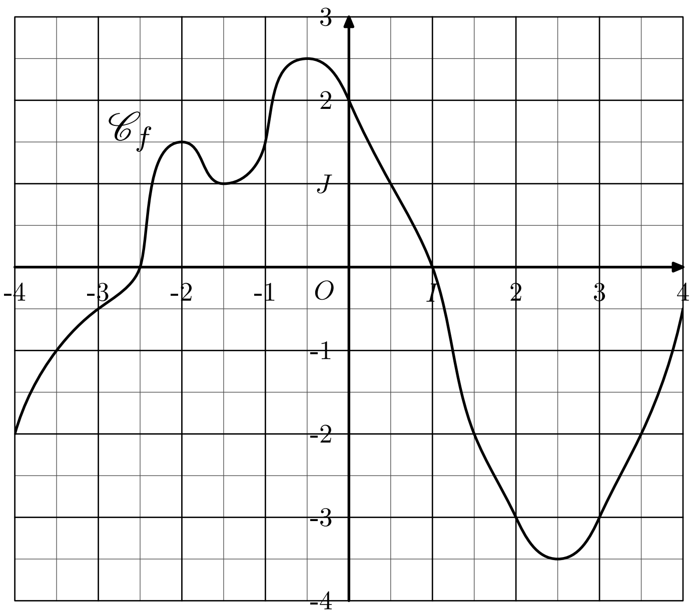
a. $(f\circ g)(-2)$ b. $(f\circ g)(1{,}5)$ c. $(f\circ g)(2)$

2. Déterminer la valeur des expressions suivantes :

a. $(g\circ f)(-3)$ b. $(g\circ f)(0)$ c. $(g\circ f)(1)$

Exercice E.114

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-4\,;\,4]$ dont la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative est donnée ci-dessous dans le repère $(O\,;\,I\,;\,J)$ orthonormé :



1. Calculer les images suivantes :

a. $(f\circ f)(1)$ b. $(f\circ f)(-2)$ c. $(f\circ f)(3)$

2. On définit la fonction f^n comme la fonction composée n fois de la fonction f par elle-même. Déterminer la valeur des images suivantes :

a. $f^3(1)$ b. $f^3(-3)$ c. $f^4(-1)$

Exercice E.115

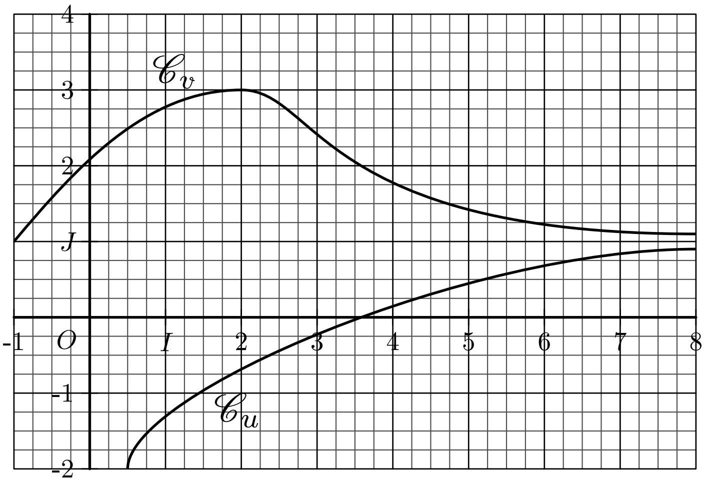
Soit f une fonction définie sur $\big[0\,;+\infty\big[$ vérifiant :
$f(0)=0 \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)=+\infty$

On considère la fonction g définie sur $\big]0\,;+\infty\big[$ par la relation :
$g(x)=\dfrac{1}{x}\cdot f\Big(\dfrac{1}{x}\Big)$

1. Déterminer la limite de la fonction g en 0.
2. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.
3. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g. Quelles conséquences peut-on déduire des deux questions précédentes pour la courbe $\mathscr{C}$?

Exercice E.116

On considère les deux fonctions numériques u et v définies sur $\mathbb{R}$ dont les courbes représentatives $\mathscr{C}_u$ et $\mathscr{C}_v$ sont données dans le repère ci-dessous :



1. Dans le repère ci-dessus, tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété suivante :
   Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a : $u(x)\leqslant f(x)\leqslant v(x)$
2. Supposons que les fonctions u et v admettent les limites suivantes :
   $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} u(x)=1 \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto+\infty} v(x)=1$
   Faire une conjecture quand à la limite de la fonction f en $+\infty$.

Exercice E.117

On considère la fonction f définie par la relation :
$f(x)=\dfrac{5}{x^2+2-\cos x}$

1. Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. a. Etablir l'encadrement suivant :
   $$\frac{5}{x^2+3}\leqslant f(x)\leqslant\frac{5}{x^2+1}$$
   b. En déduire la valeur de la limite suivante :
   $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$

Exercice E.118

Déterminer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{x+\sin(x)}{x}$ b. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x\cdot\dfrac{2+\cos x}{4}+\sin x$

Exercice E.119

Déterminer la valeur de chacune des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{5x^2+3x-1}{3x^3+2x}$ b. $\lim\limits_{x\mapsto0^-}\dfrac{3x^4-2x}{x^3+x^2}$

c. $\lim\limits_{x\mapsto2^+}\dfrac{x^2-4x+4}{-2x^2+10x-12}$ d. $\lim\limits_{x\mapsto-1^+}\dfrac{1}{2x^2+x-1}$

e. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\sqrt{x^2-7}+x$ f. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{3+\cos x}{1+x}$

Exercice E.120

$y=1/(-x+1)+2/((x+2)^2+1)$

Exercice E.121

Pour chacune des fonctions ci-dessous, déterminer leur ensemble de définition puis aux bornes de leur ensemble de définition, déterminer les limites "*à gauche*" et "*à droite*".

$f\,:\,x\longmapsto\dfrac{3x+1}{x-2} \quad ; \quad g\,:\,x\longmapsto\dfrac{1}{(2x-1)(3x+5)}$

$h\,:\,x\longmapsto\dfrac{x+2}{4x^2+4x+1} \quad ; \quad j\,:\,x\longmapsto\dfrac{2x-4}{x^2-1}$

$k\,:\,x\longmapsto\dfrac{x+2}{2x^2+5x+2}$

Exercice E.122

On considère la fonction f définie par :

$f\,:x\longmapsto\dfrac{-2x^2-2x-3}{x^2-2x-3}$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$.
2. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et $+\infty$.
3. a. Dresser le tableau de signe de l'expression x^2-2x-3.
   b. En déduire la valeur des limites suivantes :
   $\lim\limits_{x\mapsto-1^-} f(x) \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto-1^+} f(x)$
   $\lim\limits_{x\mapsto3^-} f(x) \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto3^+} f(x)$
4. a. Etablir que la dérivée de la fonction f est :
   $$f'(x)=\frac{6x(x+3)}{\big[(x-3)(x+1)\big]^2}$$
   b. Dresser le tableau de variation complet de la fonction f.
5. a. Résoudre l'inéquation : $f(x)\geqslant100$
   b. Le résultat de la question précédente correspond-t-il à ceux de la question 3. ? Justifier votre réponse.
6. a. Résoudre l'inéquation : $f(x)+2\leqslant6\times10^2$

b. Résoudre l'inéquation : $-6\times10^{-2} \leqslant f(x)+2$

c. En déduire les solutions de l'encadrement suivant :
$|f(x)+2| \leqslant 6\times10^{-2}$

7. Les résultats trouvés à la question précédente sont-ils concordants avec les résultats obtenus à la question 2..

Exercice E.123

faire un truc avec

$2x+2+\dfrac{2x-4}{e}$

qui a pour dérivée $\dfrac{2(x-4)(x-2)}{(x-3)^2}$

Super pour étudier dérivée et tableau de signe.

Exercice E.124

Apres avoir dresser le tableau de variation, donner le maximum

trace la courbe pour faire exo

$y=(4x^2-12x+9)/(-x^2+5x-6)$

Exercice E.125

faire exercice de la forme limite en 0

$\left(2x^2+x\right)\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^3}\right)$

et

$\dfrac{2x^2+x}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^3}}$

Exercice E.126

Etablir les égalités suivantes :

a. $\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{2x-3}{x-1}=\dfrac{3-x^2}{x^2-1}$

b. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{2x^2+4x+1}{x\cdot\big(x+1\big)^2}$

c. $\dfrac{\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{2x-1}}{x}=\dfrac{4x+1}{x\cdot(x+1)\cdot(2x-1)}$

Exercice E.127

Exprimer chacune des expressions algébriques ci-dessous sous la forme d'un quotient où leur numérateur et leur dénominateur sont des produits de facteurs du premier degré :

a. $\dfrac{3x}{x+2}+\dfrac{x+2}{1-x}$ b. $\dfrac{x^2+x+3}{x+1}-\dfrac{x^2+4x}{x+2}$

Exercice E.128

On souhaite déterminer les expressions des dérivées des fonctions suivantes :

$f: x\longmapsto(3x^2+3x)(2x+2)$; $g: x\longmapsto(2x^2+1)\sqrt{x}$

$h: x\longmapsto\dfrac{1}{x}\cdot(3-x^2)$; $j: x\longmapsto\dfrac{2}{x}\cdot\sqrt{x}$

1. L'expression de chacune de ces fonctions est donnée sous la forme d'un produit $u\cdot v$. Compléter le tableau ci-dessous afin d'identifier les deux facteurs de ce produit et leur dérivée respective.

	$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$
$f(x)$				
$g(x)$				
$h(x)$				
$j(x)$				

2. En utilisant la formule de dérivation d'un produit :
$(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$
Etablir que ces fonctions admettent pour dérivée les fonctions ci-dessous :

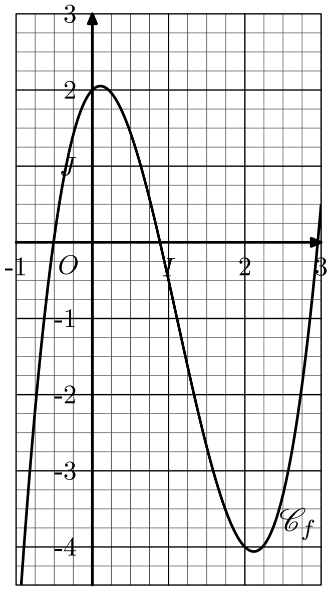
$f': x\longmapsto 18x^2+24x+6$; $g': x\longmapsto\dfrac{10x^2+1}{2\sqrt{x}}$

$h': x\longmapsto\dfrac{-x^2-3}{x^2}$; $j': x\longmapsto-\dfrac{1}{x\cdot\sqrt{x}}$

Exercice E.129

Dans le repère $(O;I;J)$ orthonormé ci-contre est donnée la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f.

On considère les points A, B, C de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisses respectives 0, 1 et 2



1. Placer les points A, B et C et par lecture graphique, donner leur coordonnée.

2. Calculer le taux de variation de la fonction f :

a. entre 0 et 2

b. entre 1 et 2

Exercice E.130

On considère la fonction f définie sur $\left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ par la relation : $f(x)=\sqrt{2x+1}$

1. a. Etablir l'égalité suivante :
$\dfrac{f(4+h)-f(4)}{h}=\dfrac{2}{\sqrt{2h+9}+3}$

b. En déduire la limite du nombre dérivée de la fonction f en 4 :
$f'(4)=\lim\limits_{h\mapsto0}\dfrac{f(4+h)-f(4)}{h}$

2. a. Donner les coordonnées du point A de la courbe $\mathscr{C}_f$ ayant pour abscisse 4.

b. Déterminer l'équation réduite de la tangente (d) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 4.

Exercice E.131

On souhaite déterminer les expressions des dérivées des fonctions suivantes :

$$f\colon x \longmapsto \frac{3-2x}{x+1} \quad ; \quad g\colon x \longmapsto \frac{x^2+4x-1}{2x-1}$$
$$h\colon x \longmapsto \frac{3}{2-x} \quad ; \quad j\colon x \longmapsto \frac{\sqrt{x}}{x+1}$$

1. L'expression de chacune de ces fonctions est donnée sous la forme d'un produit $\dfrac{u}{v}$. Compléter le tableau ci-dessous afin d'identifier le numérateur et le dénominateur de ce quotient et leurs dérivées respectives.

	$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$
$f(x)$				
$g(x)$				
$h(x)$				
$j(x)$				

2. En utilisant la formule de dérivation d'un produit :
$$\Big(\frac{u}{v}\Big)' = \frac{u'{\cdot}v - u{\cdot}v'}{v^2}$$
Etablir que ces fonctions admettent pour dérivée les fonctions ci-dessous :
$$f'\colon x \longmapsto -\frac{5}{(x+1)^2} \quad ; \quad g'\colon x \longmapsto \frac{2x^2-2x-2}{(2x-1)^2}$$
$$h'\colon x \longmapsto \frac{3}{(x-2)^2} \quad ; \quad j'\colon x \longmapsto \frac{1-x}{2(x+1)^2{\cdot}\sqrt{x}}$$

Exercice E.132

Déterminer l'expression des fonctions dérivées de chacune des fonctions ci-dessous :

a. $f\colon x \longmapsto \dfrac{2-2x}{5x+1}$

b. $g\colon x \longmapsto (3x-2)(2x^2+1)$

c. $h\colon x \longmapsto \dfrac{1}{3x+1}$

d. $j\colon x \longmapsto (2x^2+3x)\cdot\sqrt{x}$

Exercice E.133

On considère la fonction f définie par :
$$f(x) = \frac{6x+1}{x^2-x+2}$$

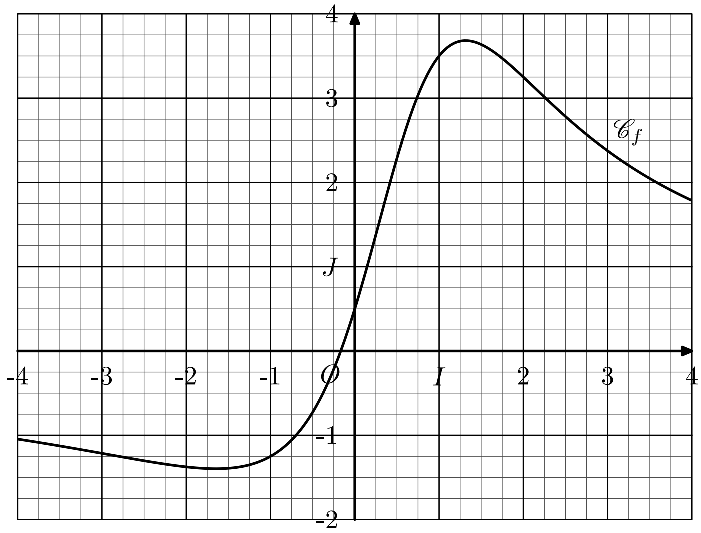
1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

2. Etablir l'égalité suivante :
$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = -\frac{7h-5}{2(h^2+h+2)}$$

3. En déduire la valeur du nombre dérivée de la fonction f en 1.

4. Donner l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f en 1.

5. Tracer dans le repère ci-dessous, la tangente (T) :



Exercice E.134

Déterminer l'expression des dérivées des fonctions suivantes :

a. $f\colon x \mapsto (2x^2-1)(4x-1)$

b. $g\colon x \mapsto (5x^4-x+1)(3-2x^2)$

c. $h\colon x \longmapsto (3-x)\cdot\dfrac{1}{x}$

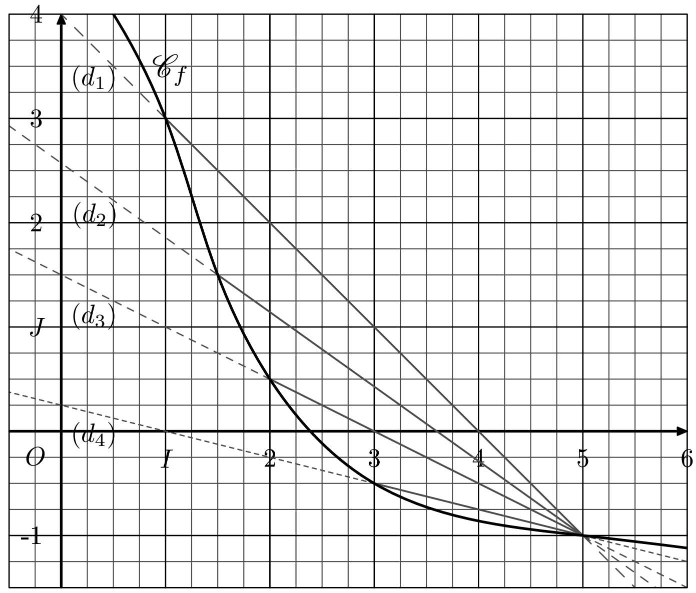
d. $j\colon x \longmapsto (x^2-3)\cdot\sqrt{x}$

Exercice E.135

On considère le plan muni d'un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ dans lequel sont représentées :

La courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f ;

Les cordes (d_1), (d_2), (d_3) et (d_4) à la courbe $\mathscr{C}_f$.



1. Déterminer les coefficients directeurs des quatre cordes à la courbe $\mathscr{C}_f$.

2. a. Tracer, à l'aide d'un règle, la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point de coordonnées $\big(5\,;-1\big)$.

   b. Donner une valeur approchée du coefficient directeur de la tangente (T).

Exercice E.136

On considère la fonction f dont l'image de x est donnée par la relation :
$$f(x) = \sqrt{x^2-3x+1}$$

1. Etablir l'égalité suivante :

$$\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\frac{h+3}{\sqrt{h^2+3h+1}+1}$$

2. a. En déduire la valeur de la limite suivante :

$$f'(3)=\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$

b. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3.

Exercice E.137

Déterminer l'expression de la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

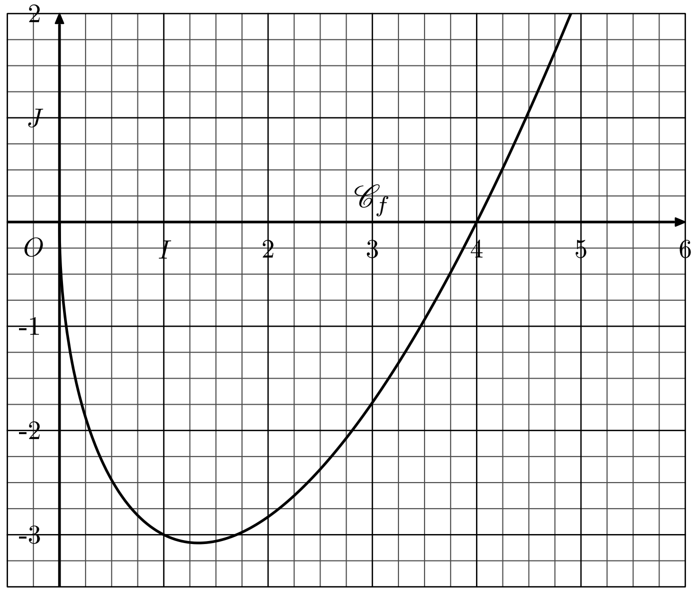
a. $f(x)=\dfrac{x+1}{3x+1}$ b. $g(x)=\dfrac{5x+1}{3-2x}$

c. $h(x)=\dfrac{x^2+3x+1}{2x+1}$ d. $j(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$

Exercice E.138

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :
$f(x)=(x-4)\sqrt{x}$

La courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f est donnée dans le repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ orthonormé :



1. a. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.

b. Déterminer l'image et le nombre dérivé de la fonction f en 4.

c. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T_1) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 4.

d. Tracer la tangente (T_1).

2. a. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T_2) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

b. Tracer la tangente (T_2).

Exercice E.139

On considère la fonction f définie sur $\Big[-\dfrac{5}{2}\,;+\infty\Big[$ par la relation : $f(x)=\sqrt{2x+5}$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ orthonormal.

1. a. Justifier l'égalité suivante pour $h\in\big[-1\,;1\big]$:

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{2}{\sqrt{2h+9}+3}$$

b. En déduire la valeur du nombre dérivée de la fonction f pour $x=2$.

2. En déduire l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.

Exercice E.140

1. On considère la fonction f définie par :
$f\colon x\longmapsto 3x^2-2x$

Montrer que : $f'(2)=\displaystyle\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=10$

2. On considère la fonction g définie par la relation :
$g\colon x\longmapsto\sqrt{3x+1}$

Montrer que : $g'(1)=\displaystyle\lim_{h\mapsto 0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=\frac{3}{4}$

Exercice E.141

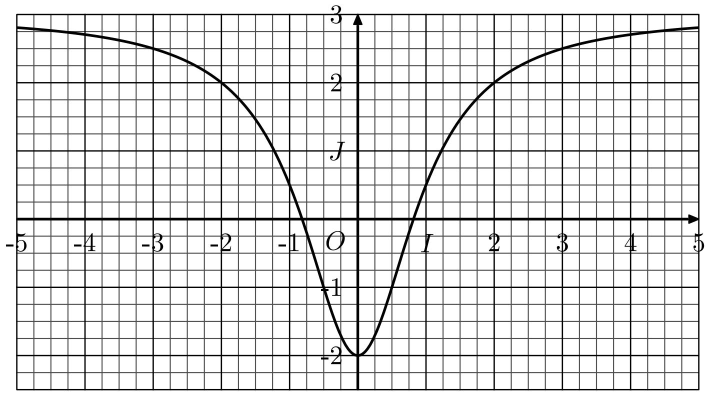
Soit f la fonction dont l'image d'un nombre réel x est définie par la relation : $f(x)=\dfrac{3x^2-2}{x^2+1}$

1. a. Pour tout nombre réel h non-nul, établir l'égalité :

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{5{\cdot}h+10}{2h^2+4h+4}$$

b. En déduire la valeur du nombre dérivée $f'(1)$ de la fonction f en 1.

2. On considère le plan muni d'un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ et on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.



a. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -1.

b. Tracer la tangente (T) dans le repère.

3. Déterminer les coordonnées des différents point d'intersection de (T) et de $\mathscr{C}_f$.

Exercice E.142

On considère les deux fonctions f et g définies par les relations :

$$f(x)=\big(x^2-3x\big)\cdot\sqrt{x}\quad ;\quad g(x)=\frac{3-2x}{x^2-3x-1}$$

Déterminer les expressions des fonctions dérivées f' et g'. *(On donnera l'expression de la fonction f' sous la forme d'un quotient simplifié).*

Exercice E.143

1. On considère les deux fonctions f et g par :
$$f(x)=(2x+1)(3x^2-x+1) \quad ; \quad g(x)=\frac{2x+5}{1-4x}$$
Déterminer l'expression de la fonction dérivée de chacune de ces deux fonctions.

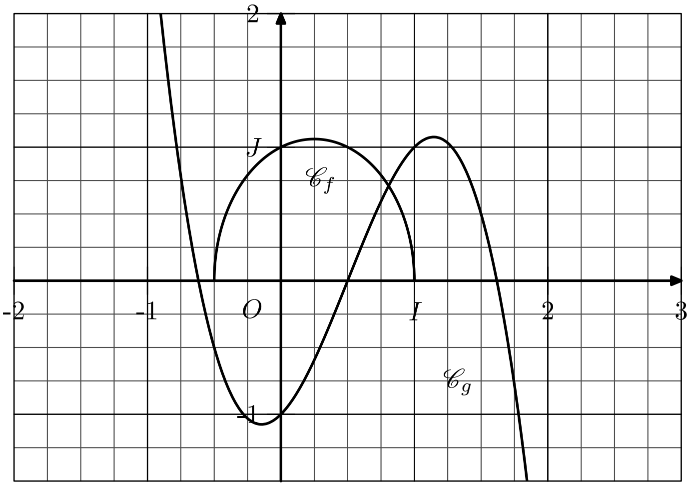
2. On considère la fonction h dont l'image de x est défini par la relation :
$$h(x)=\frac{x^2-2x+1}{x^2-5x+6}$$
   a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h.
   b. Montrer que le nombre de dérivée de h en x s'exprime par :
$$h'(x)=-\frac{3x^2-10x+7}{(x^2-5x+6)^2}$$

Exercice E.144

1. Soit f la fonction définie par la relation :
$$f: x \longmapsto \sqrt{-2x^2+x+1}$$
   a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
   b. Déterminer la valeur de la limite suivante :
$$\lim_{h\mapsto 0} \frac{f\Big(\frac{1}{2}+h\Big)-f\Big(\frac{1}{2}\Big)}{h}$$
   c. En déduire l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

2. Soit g la fonction définie par la relation :
$$g: x \longmapsto -2x^3+3x^2+x-1$$
   a. Déterminer la valeur de la limite suivante :
$$\lim_{x\mapsto 0} \frac{g(1+h)-g(1)}{h}$$
   b. En déduire l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 1.

3. La représentation des courbes représentatives de ces deux fonctions est donnée ci-dessous :



Tracer les deux tangentes obtenues précédemment dans le repère ci-dessus.

Exercice E.145

Le tableau ci-dessous vous présente, pour chaque ligne, l'expression de l'image de x par une fonction et l'expression du nombre dérivé en x de cette fonction. Vérifier l'exactitude de l'expression du nombre dérivée en x :

Fonction	Image de x	Nombre dérivé en x
f	x^3-5x^2+x-3	$3x^2-10x+1$
g	$\dfrac{2x-1}{x^2+x}$	$-\dfrac{2x^2-2x-1}{x^2{\cdot}(x+1)^2}$
h	$(x^2-3){\cdot}\sqrt{x}$	$\dfrac{5x^2-3}{2{\cdot}\sqrt{x}}$
j	$\dfrac{3x-2}{2-x}$	$\dfrac{4}{(x-2)^2}$

Exercice E.146

On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :
$$f(x)=2x^3-3x^2-x+1$$
Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f. On note (T) la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

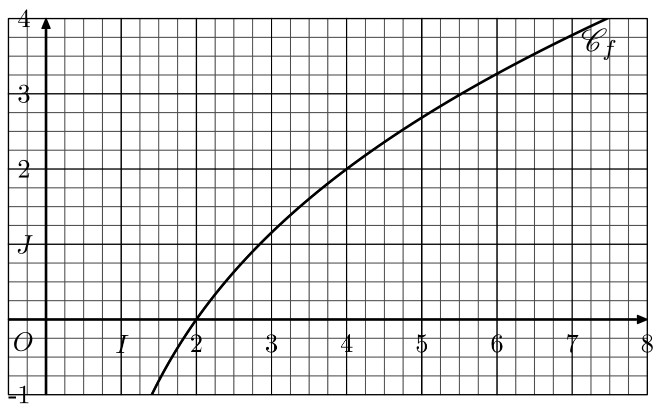
1. a. Pour tout nombre réel h non-nul, établir l'identité :
$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=2h^2+3h-1$$
   b. Quel est le coefficient directeur de la tangente (T) ? Justifier votre démarche.

2. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$.

3. a. Déterminer la valeur des réels a, b et c réalisant l'identité :
$$f(x)+x=(x-1){\cdot}\big(a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c\big)$$
   b. En déduire les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec la tangente (T).

Exercice E.147

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :
$$f(x)=\frac{2x-4}{\sqrt{x}}$$
On donne la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f dans le repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ ci-dessous :



1. Montrer que la fonction f admet pour dérivée la fonction f' dont l'expression est :
$$f'(x)=\frac{x+2}{x{\cdot}\sqrt{x}}$$

2. a. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 4.

b. Tracer la tangente (T).

Exercice E.148

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image de x est définie par la relation :

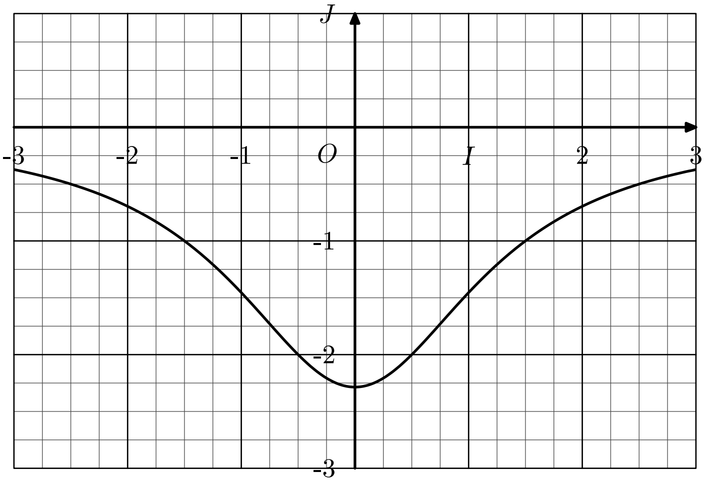
$$f(x) = -\frac{16}{4x^2+7}$$

1. a. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $-\dfrac{1}{2}$.

   b. Le repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ ci-dessous représente la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f. Tracer la représentation graphique de (T).

2. a. Etablir la factorisation suivante :
   $8x^3+20x^2+14x+3 = (2x+1)^2{\cdot}(2x+3)$

   b. Etudier la position relative de la droite (T) relativement à la courbe $\mathscr{C}_f$.

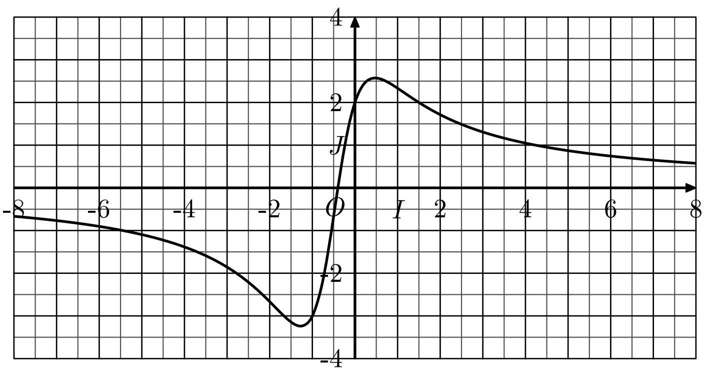


Exercice E.149

On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :

$$f(x) = \frac{5x+2}{x^2+x+1}$$

Dans le plan muni d'un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$, on considère la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f donnée ci-dessous :



1. Donner l'ensemble $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.

2. a. Justifier que la fonction f' dérivée de la fonction f admet pour expression :
   $$f'(x) = \frac{-5x^2-4x+3}{\big(x^2+x+1\big)^2}$$

   b. Etablir le tableau de signe de la fonction f'.

   c. En déduire le tableau de variation de la fonction f.

   (on indiquera les valeurs des extrémums arrondies au dixième près)

3. a. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

   b. Tracer la tangente (T) dans le repère ci-dessus.

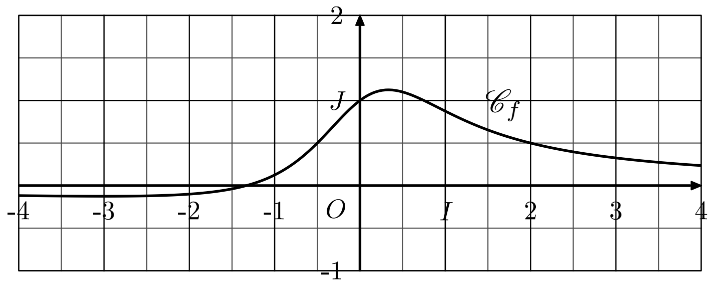
   c. Algébriquement, étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite (T).

Exercice E.150

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image d'un réel x est définie par la relation :

$$f(x) = \frac{3x+4}{4x^2+4}$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère $\big(O\,;I\,;J\big)$:



1. Démontrer que la fonction f admet pour dérivée la fonction f' dont l'expression est définie par :
   $$f'(x) = \frac{-4{\cdot}\big(3x^2+8x-3\big)}{\big(4x^2+4\big)^2}$$

2. a. Déterminer l'équation réduite de la tangente (d) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $-\dfrac{1}{2}$.

   b. Tracer, dans le repère ci-dessus, la tangente (d).

3. Justifier que toutes les tangentes à la courbe $\mathscr{C}$, dont l'abscisse des points de contact appartient à l'intervalle $\Big]-3\,;\dfrac{1}{3}\Big[$, sont associées à des fonctions affines croissantes.

Exercice E.151

Refaire entierement cet exercice, il est pique d'un autre cite :

$$f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{x-2}$$

f passe par (0 ;5) et sa tangente est horizontalle

au point d'abscisse 1 coeff directeur de -3

determiner f.

Exercice E.152

On considère les deux fonctions f et g définies par :

$$f\colon x \longmapsto 2x^2-5x+2 \quad ; \quad g\colon x \longmapsto \frac{3x-2}{1-2x}$$

1. Déterminer la fonction dérivée de ces deux fonctions.

2. On considère la droite (T) dont l'équation réduite est : $y = -x$

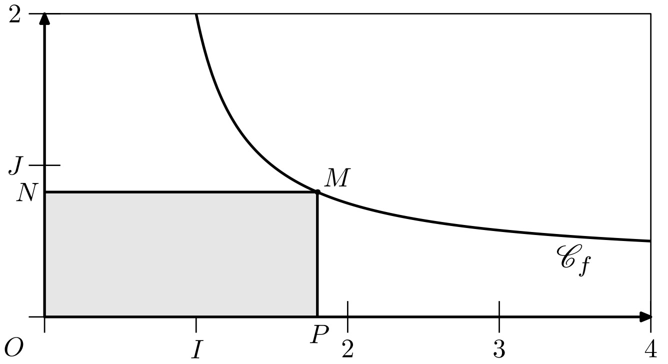
   Pour chacune des fonctions f et g, déterminer les points pour lesquels la droite (T) est une tangente à leur courbe représentative respective $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Exercice E.153

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left]\frac{2}{3}\,;+\infty\right[$ par la relation :

$$f(x) = \frac{x+1}{3x-2}$$

La représenation $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous :



On considère un point M appartenant à la courbe $\mathscr{C}_f$ et le rectangle $MNOP$ construit à partir du point O et M et dont les côtés sont parallèles aux axes.

On note $\mathcal{A}(x)$ l'aire du rectangle $MNOP$ où x est l'abscisse du point M. Le but de l'exercice est de déterminer pour quelles valeurs de x, l'aire $\mathcal{A}(x)$ est minimale.

1. Donner l'expression de $\mathcal{A}(x)$ en fonction de x.
2. Déterminer l'expression de la fonction dérivée de $\mathcal{A}$.
3. Etablir le sens de variation de la fonction $\mathcal{A}$.
4. En déduire la position du point M afin que l'aire du rectangle $MNOP$ soit minimale.

Exercice E.154

On considère la fonction f dont l'image de x est définie par :

$$f(x) = \sqrt{5-2x}$$

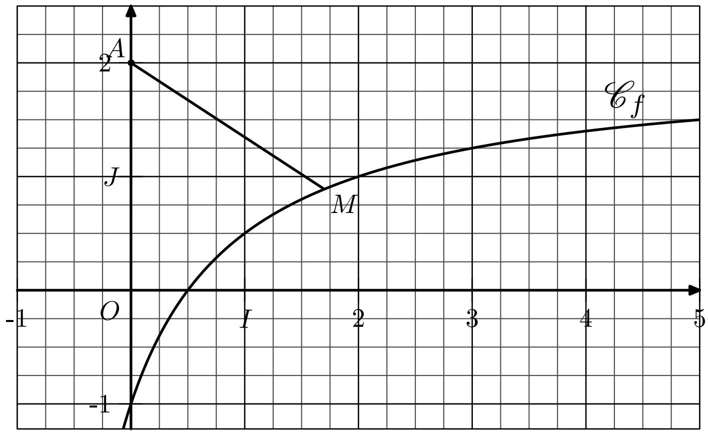
1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. a. Pour tout nombre réel h vérifiant :
   $h \neq -2 \quad ; \quad -2+h \in \mathcal{D}_f$
   Etablir l'égalité : $\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \dfrac{-2}{\sqrt{9-2h}+3}$
   b. En déduire la valeur du nombre dérivée de la fonction f en -2.
3. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -2.

Exercice E.155

On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$$

La représentation graphique est donnée ci-dessous :



On considère le point A de coordonnée $(0\,;2)$ et M un point de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Déterminer la position du point M pour laquel la longueur AM est minimale.

Exercice E.156

On considère la fonction f dont l'image de x est définie par la relation :

$$f(x) = \frac{-2x^2+x+1}{4x-1}$$

1. Etablir que la fonction f' dérivée de la fonction f a pour expression :
   $$f' : x \longmapsto -\frac{8x^2-4x+5}{(4x-1)^2}$$
2. a. La fonction f admet-elle des tangentes dont le coefficient directeur soit -1 ?
   b. Si oui, déterminer leurs équations réduites.

Exercice E.157

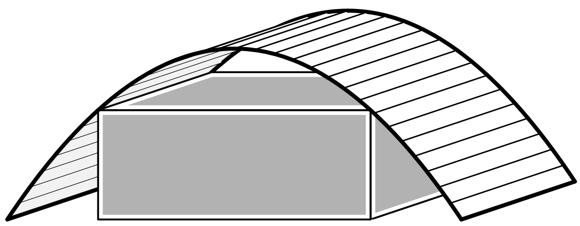
Déterminer la fonction f polynomiale du second degré vérifiant les conditions suivantes :

L'image de 2 est -2. $\qquad (-1\,;1) \in \mathscr{C}_f$

La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour coefficient directeur 2.

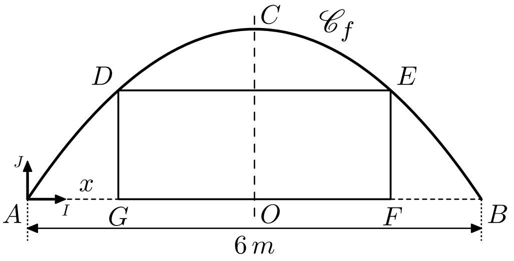
Exercice E.158

Sous un hangar, dont le toit est de forme "*parabolique*", on souhaite installer une habitation de forme parallélépipédique. Le dessin ci-dessous illustre le problème :



On suppose l'habitat s'étalant sur toute la longueur du hangar. Le but de cet exercice est de déterminer les dimensions de la façade de cet habitat afin d'en maximaliser le volume.

On modélise ce problème par la figure ci-dessous :



Le rectangle $DEFG$ admet la droite (CO) pour axe de symétrie. On note x la mesure de la longueur AG.

Dans le repère $\big(A\,;\,I\,;\,J\big)$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\big[0\,;6\big]$ par la relation :

$$f(x) = -\frac{1}{4}{\cdot}x^2 + \frac{3}{2}{\cdot}x$$

On note $\mathcal{A}(x)$ l'aire du rectangle $DEFG$ en fonction de x.

1. Le point G appartenant au segment $[AO]$, quelles sont les valeurs possibles pour la variable x exprimée en mètre ?

2. Démontrer que pour $x\in\big[0\,;3\big]$:
$$\mathcal{A}(x) = \frac{1}{2}{\cdot}x^3 - \frac{9}{2}{\cdot}x^2 + 9{\cdot}x$$

3. a. Déterminer le tableau de variation de la fonction $\mathcal{A}$ sur l'intervalle $\big[0\,;3\big]$.

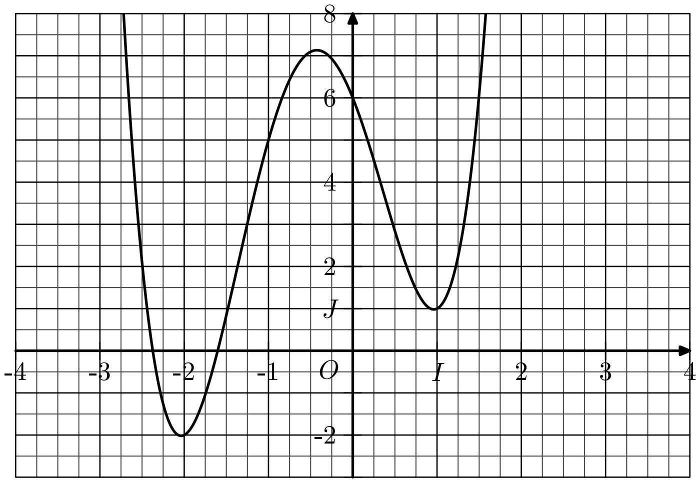
   b. En déduire la valeur de x pour laquelle l'aire du rectangle $DEFG$ est maximale.

Exercice E.159

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f : x \longmapsto \frac{3}{2}{\cdot}x^4 + 3{\cdot}x^3 - \frac{9}{2}{\cdot}x^2 - 5{\cdot}x + 6$$

On donne, ci-dessous, la courbe représentative de la fonction f dans un repère $(O\,;I\,;J)$:



La courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de cette fonction admet une droite (d) de coefficient directeur 1 comme tangente en deux points.

Déterminer l'équation de cette droite et les coordonnées de ces deux points.

Exercice E.160

On considère la fonction f, définie sur $\Big[-\dfrac{1}{5}\,;+\infty\Big[$, dont l'image d'un nombre réel x est donnée par la relation :

$$f(x) = \sqrt{5x+1}$$

1. Pour $x\in\mathcal{D}_f$ et $h\in\mathbb{R}$ tel que $h\neq 0$ et $(x{+}h)\in\mathcal{D}_f$, établir l'égalité suivante :
$$\frac{f(x{+}h) - f(x)}{h} = \frac{5}{\sqrt{5x+5h+1}+\sqrt{5x+1}}$$

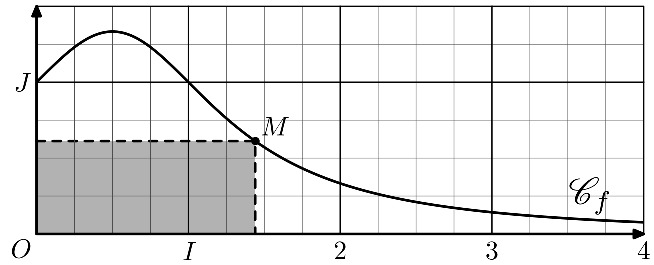
2. En déduire l'expression de la fonction dérivée de la fonction f.

Exercice E.161

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x + 1}$$

Dans le plan muni d'un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$, on considère la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



On considère un point M appartenant à la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x et on construit comme l'indique la figure ci-dessus un rectangle où les points O et M sont des sommets de celui-ci.

On note $\mathcal{A}(x)$ l'aire de ce rectangle en fonction de la valeur de x.

1. Donner l'expression de la fonction $\mathcal{A}$.

2. a. Déterminer l'expression de la fonction $\mathcal{A}'$ dérivée de la fonction $\mathcal{A}$.

   b. Dresser le tableau de signe de la fonction $\mathcal{A}'$.

   c. Dresser le tableau de variations de la fonction $\mathcal{A}$.

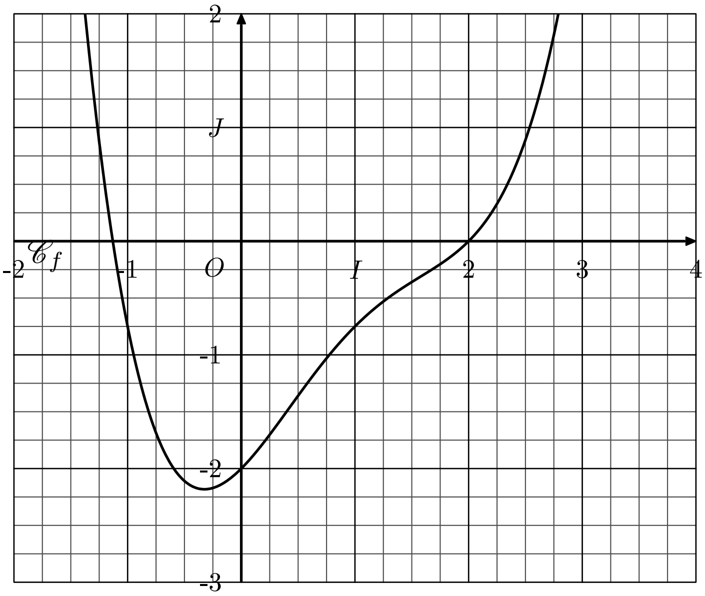
3. Quel est la position du point M afin que l'aire du rectangle soit maximale ?

Exercice E.162

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f : x \longmapsto \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 + x - 2$$

Voici la courbe représentative de la fonction f dans le repère $(O\,;\,I\,;\,J)$:



La courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de cette fonction admet une droite (d) de coefficient directeur 1 comme tangente en deux points.

Déterminer l'equation de cette droite et les coordonnées de ces deux points.

Exercice E.163

On considère la fonction f dont l'image de x, pour $x \in [1\,;+\infty[$, est définie par la relation :

$$f(x) = (x^2 - 4x + 3)\sqrt{2x - 2}$$

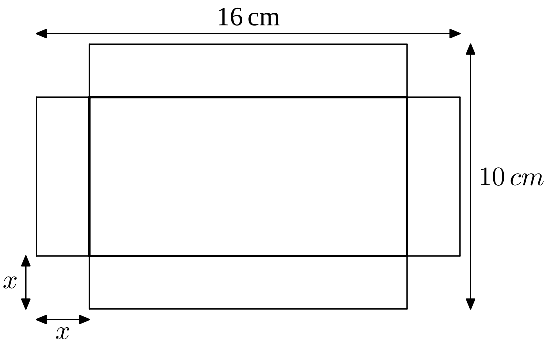
1. Donner une forme simplifiée de :

$$\frac{f(1+h)}{h} \quad \text{pour } h > 0$$

2. En déduire le nombre dérivée de la fonction f en 1.

Exercice E.164

On veut réaliser, dans le patron ci-dessous une boîte rectangulaire sans couvercle. Les longueurs sont exprimées en *cm*.



1. a. Quelles valeurs peut prendre la variable x dans ce problème ?

   b. Donner l'expression du volume $\mathcal{V}$ en fonction de la valeur de x.

2. a. Déterminer l'expression de la fonction $\mathcal{V}'$ dérivée de la fonction f.

   b. Dresser le tableau de variation de la fonction $\mathcal{V}$.

   c. Justifier que la fonction $\mathcal{V}$ admet une valeur maximale sur l'intervalle $[0\,;\,5]$.

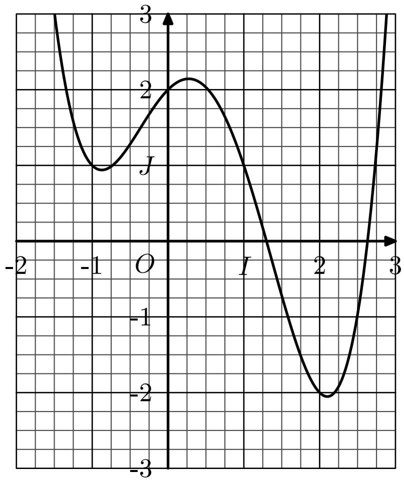
3. Quelle est le volume maximale qu'on obtenir avec ce type de boite ?

Exercice E.165

On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{2}\cdot x^4 - x^3 - \frac{3}{2}\cdot x^2 + x + 2$$

On munit le plan d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormal dans lequel est représenté la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



1. a. Tracer la droite (d) d'équation : $y = -x$.

   b. Effectuer une conjecture sur les coordonnées en lesquels la droite (d) est une tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$.

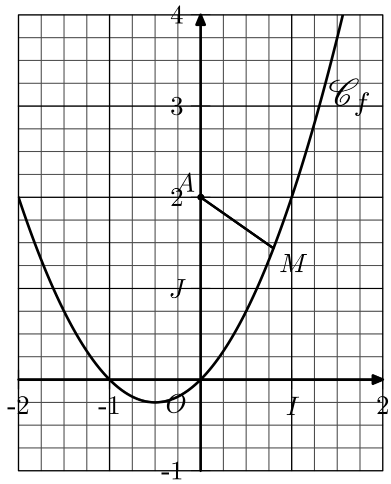
2. Etablir vos conjectures de la question 1. b..

Exercice E.166

On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = x^2 + x$$

La représentation graphique est donnée ci-contre :



On considère le point A de coordonnée $(0\,;1)$ et M un point de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Déterminer la position du point M pour laquel la longueur AM est minimale.

Au cours de l'exercice, on utilisera la factorisation :

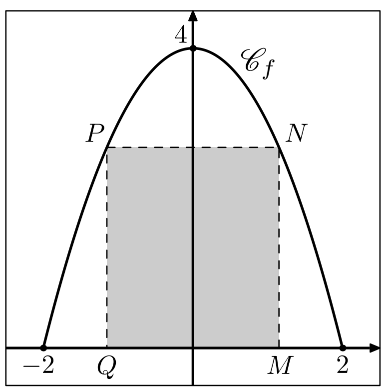
$$4x^3 + 6x^2 - 2 = 2(x+1)^2(2x-1)$$

Exercice E.167

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = 4 - x^2$$

Ci-dessous, est donnée la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,J)$:



Le point M est un point de l'axe des abscisses de coordonnées $(x\,;0)$ où $x \in [0\,;2]$. A partir du point M, on construit le rectangle $MNPQ$ dont les côtés sont parallèles aux axes.

Déterminer la position du point M afin que l'aire du rectangle $MNPQ$ soit maximale.

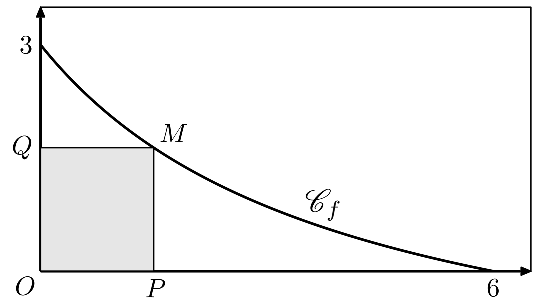
Dans cet exercice, toute trace de recherche ou d'initiative, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Exercice E.168

On considère la fonction f définie sur $\big[0\,;6\big]$ par :

$$f(x)=\frac{12-2x}{x+4}$$

Dans le repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ orthonormé ci-dessous, est donnée la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



Soit M un point de la courbe $\mathscr{C}_f$. On considère les points P et Q appartenant respectivement à l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées de sorte à ce que le quadrilatère $OPMQ$ soit un rectangle.

Déterminer la position du point M afin que l'aire du rectangle $OPMQ$ soit maximale.

F. Suites numériques:

Exercice F.1

Déterminer les 5 premiers termes des suites suivantes :

a. $u_n=2{\cdot}n^2-n+1$

b. $v_n=\dfrac{2{\cdot}n+1}{2-3{\cdot}n}$

c. $w_n=\sqrt{3n+25}$

d. $x_n=3{\cdot}\big[1+(-1)^n\big]+2$

Exercice F.2

1. On considère la suite $\big(u_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} u_0=1 \quad ; \quad u_1=1 \\ u_{n+2}=u_{n+1}+u_n, \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}\end{cases}$$
Déterminer la valeur des huit premiers termes de la suite $\big(u_n\big)$.

2. On considère la suite $\big(v_n\big)_{n\mathbb{N}^*}$ définie par :
$$v_1=2 \quad ; \quad v_{n+1}=\frac{1}{v_n}+n \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$
Déterminer les cinq premiers termes de la suite $\big(v_n\big)$.

Exercice F.3

1. On considère la suite $\big(u_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la formule explicite :
$$u_n=5+2\times n \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$
   a. Exprimer la valeur u_{n-3} en fonction de n.
   b. Donner la forme simplifiée de $u_{n-3}+u_3$.
   c. Donner la forme simplifiée de $u_{n-5}+u_5$.
   d. Soit k et n deux entiers tels que $k\leqslant n$. Montrer que u_k+u_{n-k} a sa valeur indépendante de k.

2. On considère la suite $\big(v_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la formule explicite :
$$v_n=2n^2-3n+2 \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$
On souhaite étudier la différence entre deux termes consécutifs de la suite (v_n) :
   a. Donner l'expression du terme v_{n+1} en fonction de n.
   b. Etudier la valeur de $v_{n+1}-v_n$ en fonction de n.

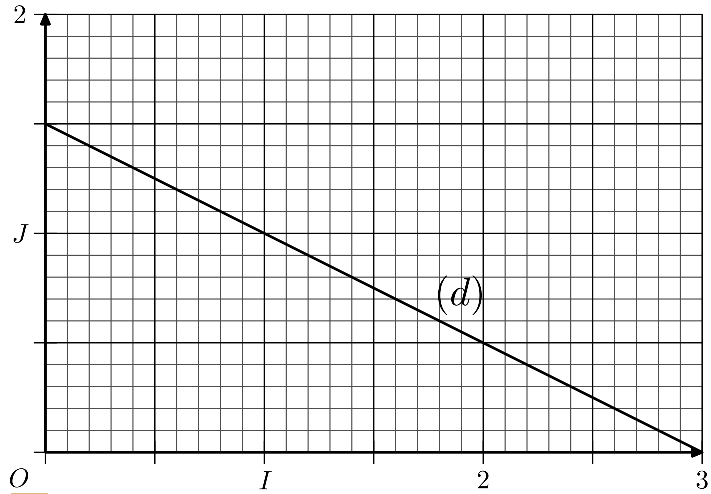
Exercice F.4

On considère la suite $\big(u_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$u_0=\frac{5}{2} \quad ; \quad u_{n+1}=-\frac{1}{2}{\cdot}u_n+\frac{3}{2} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

Le graphique ci-dessous représente, dans un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ orthonormé, la droite (d) ayant pour équation :

$$y=-\frac{1}{2}{\cdot}x+\frac{3}{2}$$



1. Graphiquement, sur l'axe des abscisses représentées les cinq premiers termes de cette suite *(les constructions doivent être laissées)*.

2. Par le calcul, déterminer les valeurs exactes des cinq premiers termes de cette suite.

Exercice F.5

1. Soit $\big(u_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme 2 et de raison $\dfrac{1}{2}$.
   a. Déterminer la somme de ses 10 premiers termes :
   $$S=u_0+u_1+\cdots+u_8+u_9$$
   b. Déterminer la somme des termes de la suite $\big(u_n\big)$ allant de u_4 à u_{22} :
   $$S'=u_4+u_5+\cdots+u_{21}+u_{22}$$

2. On considère la somme numérique suivantes :

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

Déterminer la valeur de S_n en fonction de n.

3. Soit S_3 la somme numérique suivante :

$$S_3 = 1 + \sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} + \cdots + 8\sqrt{2}$$

a. Donner les caractéristiques de la suite géométrique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont la somme des premiers termes est S_3.

b. En déduire la valeur de S_3.

Exercice F.6

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique dont on a connaissance des deux termes suivants :

$$u_7 = 3 \quad \text{et} \quad u_{19} = 11$$

Déterminer le premier terme et la raison de cette suite.

2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique dont les termes de rangs 4 et 8 valent respectivement 3 et $\dfrac{16}{27}$

Déterminer les deux valeurs possibles de la raison. Donner la valeur du premier terme des deux suites.

Exercice F.7

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme 2 et de raison $\dfrac{3}{5}$, déterminer la valeur de la somme suivante :

$$S = u_5 + u_6 + \cdots + u_{21}$$

2. On considère la somme suivante dont les termes sont ceux d'une suite géométrique :

$$S' = 16 + 24 + 36 + \cdots + \frac{3^{10}}{2^6}$$

Déterminer la valeur de la somme S'.

Exercice F.8

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence et vérifiant les conditions :

$$u_7 = 5 \quad ; \quad u_{10} = 11 \quad ; \quad u_{n+2} = 2\cdot u_{n+1} - u_n \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. a. Justifier que la différence de deux termes consécutifs est constante.

b. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

2. a. Déterminer les éléments caractéristiques de (u_n).

b. Exprimer le terme u_n en fonction du rang n.

Exercice F.9

On considère la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme $\dfrac{3}{4}$ et de raison $\dfrac{1}{2}$.

1. Déterminer la valeur des cinq premiers termes de cette suite.

2. Donner la formule explicite de (u_n) donnant la valeur d'un terme en fonction de son rang.

3. Dterminer la limite de la suite (u_n).

4. Déterminer la valeur de la suite suivante :

$$S = u_5 + u_6 + \cdots + u_{12}$$

Exercice F.10

1. Déterminer les cinq premiers termes de la suite (u_n) arithmétique de premier terme 2 et de raison 3.

2. Déterminer les cinq premiers termes de la suite (v_n) arithmétique de premier terme 3 et de raison $-\dfrac{3}{2}$.

Exercice F.11

1. Déterminer les quatre premiers termes de la suite (u_n) géométrique de premier terme 2 et de raison 3.

2. Déterminer les quatre premiers termes de la suite (v_n) géométrique de premier terme 3 et de raison $-\dfrac{3}{2}$.

Exercice F.12

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. Pour chacune des sommes suivantes, préciser son nombre de termes :

a. $u_0 + u_1 + \cdots + u_{32}$

b. $u_5 + u_6 + \cdots + u_{15}$

c. $u_0 + u_1 + \cdot + u_n$

d. $u_5 + u_6 + \cdots + u_n$

e. $u_k + u_{k+1} + \cdots + u_{100}$

f. $u_k + u_{k+1} + \cdots + u_n$

g. $u_0 + u_2 + \cdots + u_{88}$

h. $u_{3k} + u_{3k+3} + \cdots + u_{99}$

i. $\displaystyle\sum_{k=0}^{64} u_k$

j. $\displaystyle\sum_{k=5}^{16} u_{2k}$

Exercice F.13

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \quad ; \quad u_{n+1} = -\frac{1}{2}\cdot u_n + 1 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. Déterminer les cinq premiers termes de la suite (u_n).

2. On considère la suite (v_n) définie par :

$$v_n = u_n - \frac{2}{3} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

a. Déterminer les quatre premiers termes de la suite (v_n).

b. Etablir que pour tout entier naturel n, on a :

$$v_{n+1} = -\frac{1}{2}\cdot v_n$$

c. Donner la nature et les valeurs des éléments caractéristiques de la suite (v_n).

3. a. Déterminer la valeur de la somme S définie par : $S = v_0 + v_1 + \cdots + v_{14}$

b. Déterminer la valeur de la somme S définie par : $S' = u_0 + u_1 + \cdots + u_{14}$

4. a. Donner l'expression du terme v_n en fonction de son rang n.

b. Donner l'expression du terme u_n en fonction de son rang n.

Exercice F.14

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation :

$$u_0 = 8 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 5 \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

1. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :
$v_n = u_n + 10 \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

a. Montrer que la suite (v_n) vérifie la relation suivante pour tout entier naturel n :
$v_{n+1} = \dfrac{1}{2}\cdot v_n$

b. Donner la nature de la suite (v_n) ainsi que ses éléments caractéristiques.

c. Donner la formule explicite donnant l'expression du terme v_n en fonction de son rang n.

2. Déduire des questions précédentes, la formule explicite de la suite (u_n).

Exercice F.15

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme 2 et de raison $\dfrac{1}{2}$

a. Calculer la somme des 13 premiers termes de (u_n) :
$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{11} + u_{12}$

b. Calculer la somme des termes de (u_n) allant de u_5 à u_{20} : $\quad S' = u_5 + u_6 + \cdots + u_{19} + u_{20}$

2. On considère les deux sommes suivantes :

$$S_1 = 1 + \frac{5}{2} + 4 + \frac{11}{2} + \cdots + 100$$

$$S_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} + \cdots + \frac{16\sqrt{3}}{3}$$

a. Déterminer les caractéristiques des suites arithmétiques (v_n) et (w_n) définissant respectivement les termes des sommes S_1 et S_2.

b. En déduire la valeur des sommes S_1 et S_2.

Exercice F.16

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique de premier terme 1 et de raison 2.

a. Déterminer la somme de ses 8 premiers termes :
$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_7$

b. Déterminer la somme des termes suivants :
$S' = u_3 + u_4 + u_5 + u_6$

2. Les termes de chaque somme sont les termes d'une suite géométrique. Déterminer la valeur de ces deux sommes :

a. $S_1 = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \cdots + \dfrac{1}{1024}$

b. $S_2 = 2 + \sqrt{3} + \dfrac{3}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{4} + \dfrac{9}{8}$

Exercice F.17

1. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ arithmétique telle que :
$u_{13} = 7 \quad ; \quad u_{20} = \dfrac{35}{2}$

a. En justifiant votre démarche, retrouver les éléments caractéristiques de cette suite.

b. En déduire la valeur de la somme S définie par :
$S = u_5 + u_6 + \cdots + u_{22}$

2. On considère une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique telle que :
$v_9 = \dfrac{5^6}{7^4} \quad ; \quad v_{16} = \dfrac{5^{13}}{7^{11}}$

a. En justifiant votre démarche, retrouver les éléments caractéristiques de cette suite.

b. En déduire la valeur de la somme S' définie par :
$S' = v_5 + v_6 + \cdots + v_{22}$

Exercice F.18

On considère la suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme $\dfrac{16}{27}$ et de raison $\dfrac{3}{2}$.

1. Déterminer la valeur des cinq premiers termes de cette suite.

2. Donner la formule explicite de (u_n) donnant la valeur d'un terme en fonction de son rang.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. Déterminer la valeur de la suite suivante :
$S = u_3 + u_4 + \cdots + u_{16}$

Exercice F.19

On considère la suite (u_n) définie par :
$u_0 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = 2\cdot u_n + 3^n \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1. a. Déterminer les cinq premiers termes de (u_n).

b. Quelle conjecture peut-on faire sur la nature de (u_n)

2. Montrer que la suite géométrique (v_n) de premier terme v_0 et de raison 3 vérifie la relation :
$v_{n+1} = 2\cdot v_n + 3^n$.

Exercice F.20

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique dont on connait deux termes :
$u_4 = 12 \quad ; \quad u_{22} = -24$

Donner, en justifiant votre démarche, les éléments caractéristiques de cette suite.

2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique dont on connait deux termes :
$v_4 = 8 \quad ; \quad v_7 = \dfrac{64}{27}$

Donner, en justifiant votre démarche, les éléments caractéristiques de cette suite.

Exercice F.21

Un coureur se lance un défi : il souhaite faire le tour de l'Europe.
Le premier jour, il parcourt 50 km. Par la fatigue, de jour en jour, sa distance parcourue quotidiennement se réduit de 1 %.

On note u_n la longueur parcourue par le coureur le n-ième jour. En supposant ue le coureur poursuit indéfiniment sa course, on obtient une suite (u_n) définie pour tout entier naturel non-nul.

1. Déterminer la valeur des quatre permiers termes de la suite (u_n).

2. a. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Donner les élèments caractéristiques de la suite (u_n).

b. Exprimer le terme u_n en fonction du rang n.

c. Quelle distance sera parcourue par le coureur le 100^e jour ? On arrondira la valeur au dixième de kilomètre.

3. On note S la somme des n premiers termes de la suite (u_n) : $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

a. Exprimer la somme S_n en fonction du rang n.

b. Compléter le tableau suivant en arrondissant les valeurs au dixième de kilomètres :

n	10	100	500	750	1000
u_n					

c. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la somme S_n quand la valeur de n devient de plus en plus grand ?

Exercice F.22

Considérons la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 5 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. Soit (v_n) la suite définie par la relation :

$$v_n = u_n - 6 \quad \text{pour } n\in\mathbb{N}$$

a. Etablir que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison de cette suite.

b. Donner l'expression du terme v_n en fonction de son rang n.

2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice F.23

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ arithmétique dont on connait la valeur de deux termes : $u_{14} = 2 \quad ; \quad u_{20} = 0$

1. Déterminer le premier terme et la raison de cette suite.

2. a. Déterminer l'expression du terme u_n en fonction de la valeur de n.

b. Déterminer le rang du terme valant $\dfrac{10}{3}$

Exercice F.24

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme 5 et de raison $\dfrac{2}{3}$. Déterminer la valeur de la somme :
$S = u_{10} + u_{11} + \cdots + u_{21}$

2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme 12 et de raison $-\dfrac{1}{2}$. Déterminer la valeur de la somme :
$S' = v_7 + v_8 + \cdots + v_{12}$

Exercice F.25

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ arithmétique de premier terme -3 et de raison 4.

a. Donner l'expression du terme u_n en fonction de son rang n.

b. Quel est le rang du terme de la suite (u_n) ayant pour valeur 605

c. Déterminer la valeur de la somme S définie par :
$S = u_0 + u_1 + \cdot + u_{100}$

2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique de premier terme 12 et de raison $\dfrac{1}{4}$.

a. Donner l'expression du terme v_n en fonction de son rang n.

b. Quel est le rang du terme de la suite (v_n) ayant pour valeur $\dfrac{3}{64}$

c. Déterminer une expression simplifiée de la somme S définie par :
$S = v_0 + v_1 + \cdots + v_{30}$

Exercice F.26

Soit x un nombre réel différent de 1.

1. Exprimer la somme suivante en fonction de x :
$S = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n$

2. En déduire une factorisation du polynôme $1-x^{n+1}$.

Exercice F.27

1. Soit (u_n) une suite arithmétique définie pour $n\in\mathbb{N}$. On a la valeur des deux termes suivants :
$u_4 = 3 \quad ; \quad u_7 = 15$

a. Déterminer les éléments caractéristiques de la suite (u_n).

b. Donner la formule de récurrence, puis la formule explicite de la suite (u_n)

2. Soit (v_n) une suite géométrique définie pour $n\in\mathbb{N}$. On a la valeur des deux termes suivants :
$v_2 = 2 \quad ; \quad v_5 = 54$

a. Déterminer les éléments caractéristiques de la suite (v_n).

b. Donner la formule de récurrence, puis la formule explicite de la suite (v_n)

Exercice F.28

On considère les deux suites (a_n) et (b_n) définies conjointement par les relations :

$$\begin{cases} a_0 = 0{,}40 \\ b_0 = 0{,}41 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} a_{n+1} = 0{,}6a_n + 0{,}3b_n \\ b_{n+1} = 0{,}3a_n + 0{,}6b_n \end{cases} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. Donner la valeur exacte des trois premiers termes de chacune des suites (a_n) et (b_n).

2. On définit les deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :
$u_n = a_n + b_n \quad ; \quad v_n = b_n - a_n \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,9. On précisera également le premier terme.

b. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera les élèments caractéristiques.

Exercice F.29

Déterminer les progressions géométriques de sept termes *(à termes réels)* telles que la somme des trois premiers termes est égale à 2 et la somme des trois derniers termes est égale à 1 250

Exercice F.30

1. On définie la suite par récurrence $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation :
$u_0 = 5 \quad ; \quad u_{n+1} = 2{\cdot}u_n - 1 \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

Déterminer les cinq premiers termes de la suite (u_n).

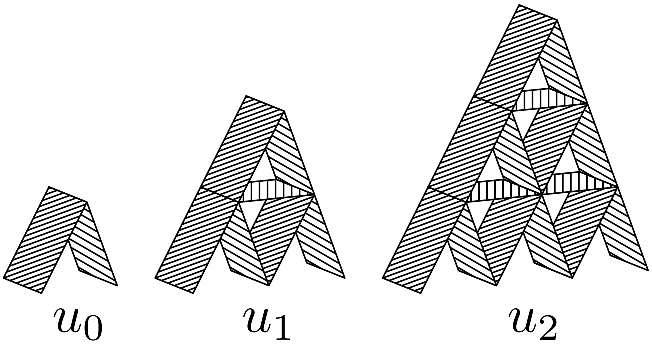
2. On définie la suite par récurrence $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par la relation :

$$v_1 = -2 \quad ; \quad v_{n+1} = \frac{1-v_n}{n} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*$$

Déterminer les cinq premiers termes de la suite (v_n).

Exercice F.31

On considère la construction d'un château de cartes :



On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désignant le nombre de cartes utilisées dans la construction du château à l'étape n.

1. Déterminer les quatres premiers termes de la suite (u_n).
2. Pour tout entier naturel n, déterminer une expression du terme u_{n+1} en fonction du terme précédent u_n et du rang n.
3. A quel étape de construction peut-on arriver avec deux jeux de 72 cartes ?

Exercice F.32

1. Pour chaque suite, déterminer la formule explicite définissant les termes de la suite en foncion de n :
   a. $(2\ ,\ 4\ ,\ 6\ ,\ 8\ ,\ 10\ ,\ \dots)$
   b. $(3\ ,\ 7\ ,\ 11\ ,\ 15\ ,\ 19\ ,\ \dots)$
   c. $(-1\ ,\ 2\ ,\ -4\ ,\ 8\ ,\ -16\ ,\ 32\ ,\ \dots)$
   d. $(1\ ,\ 3\ ,\ \sqrt{17}\ ,\ 5\ ,\ \sqrt{33}\ ,\ \sqrt{41}\ ,\ \dots)$
   e. $\left(2\ ,\ \frac{3}{2}\ ,\ \frac{4}{3}\ ,\ \frac{5}{4}\ ,\ \dots\right)$
2. Pour chaque suite, déterminer la formule de récurrence reliant un terme à son prédécesseur.
   a. $(2\ ,\ 5\ ,\ 8\ ,\ 11\ ,\ 14\ ,\ \dots)$
   b. $(2\ ,\ 6\ ,\ 18\ ,\ 54\ ,\ 162\ ,\ \dots)$
   c. $(6\ ,\ -6\ ,\ 6\ ,\ -6\ ,\ 6\ ,\ -6\ ,\ \dots)$
   d. $(1\ ,\ 3\ ,\ 7\ ,\ 15\ ,\ 31\ ,\ \dots)$

Exercice F.33

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence suivante :

$$u_0 = 3 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1-u_n}{1+u_n} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. Déterminer les cinq premiers termes de la suite (u_n).
2. Montrer qu'on a la relation suivante :
   $$u_{n+2} = u_n \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$
3. Que peut-on dire des termes de cette suite ?
4. Déterminer la valeur des réels a et b vérifiant la relation suivante :
   $$u_n = a\cdot\left[1-(-1)^n\right] + b \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

Exercice F.34

La suite (u_n) est définie par :

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1, \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

Démontrer que pour tout $n\geqslant 3$, on a : $\quad u_n \geqslant 0$.

Exercice F.35

On considère la suite u définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n = \frac{n}{n+1}.$$

Exercice F.36

1. Soit (u_n) une suite dont le terme de rang n est définie, pour tout entier naturel n, par :
   $$u_n = \frac{2\cdot n}{n+1}$$
   Donner l'expression simplifiée des termes u_{n+1} et u_{n+2} en fonction de n.
2. Soit (v_n) une suite dont le terme de rang n s'écrit en fonction de n :
   $$v_n = 3^{n-1} + 4^{n+1} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$
   Donner une expression des termes v_{n+1} et v_{n+2} en fonction de n.
3. Pour tout entier naturel n non-nul, on a l'égalité :
   $$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$$
   Donner l'écriture de cette identité au rang $(n+1)$.

Exercice F.37

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 3 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{3}{2}\cdot u_n - 1 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. Etablir que, pour tout entier naturel n, on a : $\quad u_n \geqslant 3$
2. En déduire que la suite (u_n) est croissante.

Exercice F.38

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence et vérifiant les conditions :

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_1 = 4 \quad ; \quad u_{n+2} = 2\cdot u_{n+1} - u_n \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. a. Déterminer les cinq premiers termes de la suite (u_n).
   b. Emettre une conjecture quant à la nature de la suite (u_n).
   c. Que reste-t-il à montrer pour établir cette récurrence ?
2. a. Donner l'expression simplifiée de $u_{n+2} - u_{n+1}$.
   b. Cela suffit-il pour justifier la conjecture ?

Exercice F.39

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non-nul, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

Exercice F.40

Etablir la propriété suivante, à l'aide d'un raisonnement par récurrence pour tout $n \geqslant 1$:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice F.41

Etablir l'identité suivante pour tout entier naturel n :

$$\frac{(n+2)\cdot(1+2\cdot n)+1}{n+1} = 1 + 2\cdot(n+1)$$

Exercice F.42

Pour $x \neq 1$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Exercice F.43

On considère la suite géométrique (v_n) de premier terme 24 et de raison $\dfrac{1}{2}$.

1. Donner les quatre premiers termes de la suite (v_n).
2. Exprimer la valeur du terme v_n en fonction de son rang n.
3. Démontrer que la suite (v_n) est croissante.

Exercice F.44

Dans cet exercice, on utilisera la méthode de la différence pour prouver la monotonie des suites :

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite dont le terme de rang n est définie par :
   $u_n = -32n + 102 \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

   Montrer que cette suite est décroissante.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite dont le terme de rang n est définie par :
   $v_n = \sqrt{2n-1} \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

   Montrer que cette suite est croissante.
3. Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite dont le terme de rang n est définie par :
   $w_n = 2n - \dfrac{25}{n} \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

   Montrer que la suite (w_n) est croissante.

Exercice F.45

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
   $u_n = \dfrac{5^n}{n+2} \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
   est une suite croissante sur $\mathbb{N}$.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation explicite :
   $v_n = n^3 - 2n^2 - 3n$
   a. Donner l'expression réduite de $v_{n+1} - v_n$.
   b. En déduire que la suite (v_n) est croissante pour n supérieur à 2.

Exercice F.46

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, la suite définie par la relation de récurrence et la condition initiale :
   $u_1 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{u_n}} \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

   Calculer les 6 premiers termes de la suite.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite dont le terme de rang n a pour valeur : $v_n = \dfrac{1}{n} \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
   a. Donner la valeur de v_1.
   b. Donner l'expression réduite de l'expression :
   $v_{n+1} \times \left(1 + \dfrac{1}{v_n}\right)$
   c. En déduire que : $v_{n+1} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{v_n}}$
3. Que pouvez-vous dire des suites (u_n) et (v_n) ?

Exercice F.47

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :
$u_n = 3^n + n - 1$

1. a. Donner l'expression du terme u_{n+1} en fonction de n.
   b. Simplifier l'écriture de l'expression : $3\cdot u_n - 2n + 3$
2. Comparer les deux suites (u_n) et (v_n) où (v_n) est définie par :
   $v_0 = 0 \quad ; \quad v_{n+1} = 3\cdot v_n - 2\cdot n + 3 \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice F.48

Déterminer les limites des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ci-dessous définies explicitement :

a. $u_n = \dfrac{2n^2 - 3n + 1}{n+1}$ b. $u_n = \dfrac{n-3}{n^2+1}$

c. $u_n = \dfrac{2\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}+1}$ d. $u_n = 1 + n - 2n^2 + 3n^3$

Exercice F.49

Déterminer les limites des suites (u_n) définies ci-dessous :

a. $n^3 \times 5^n$ b. $n - \left(\dfrac{2}{7}\right)^n$ c. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n - \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$

d. $8^n - 3^n$ e. $\dfrac{5^n - 2^n}{3^n + 2^n}$ f. $\left(\dfrac{31}{7}\right)^n \cdot \left(\dfrac{2}{8}\right)^n$

Exercice F.50

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie explicitement par :
   $u_n = 9n - 5$
   a. Déterminer la nature de la suite (u_n) en précisant ses caractéristiques.
   b. Déterminer la limite de la suite (u_n).

2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie explicitement par :
$v_n = 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$

a. Déterminer la nature de la suite (v_n) en précisant ses caractéristiques.

b. Déterminer la limite de la suite (v_n).

Exercice F.51

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme 2 et de raison -1.

a. Déterminer l'expression explicite des termes de la suite en fonction du rang n.

b. On note $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite. Donner l'expression de S_n en fonction de n.

c. En déduire la limite $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} S_n$.

2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme 5 et de raison $\frac{1}{2}$.

a. Déterminer l'expression explicite des termes de la suite en fonction du rang n.

b. On note $S'_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite. Donner l'expression de S'_n en fonction de n.

c. En déduire la limite $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} S'_n$.

Exercice F.52

Un globe-trotter a parié de parcourir $5\,000\,km$ à pied.
Il peut, frais et dispos, parcourir $50\,km$ en une journée, mais chaque jour la fatigue s'accumule et donc sa performance diminue de $1\,\%$ tous les jours.

On notera d_n la distance parcourue durant le n-ième jour.

1. Calculer les distances d_1, d_2, d_3 parcourues durant les trois premiers jours.

2. Quelle est précisément la nature de la suite ?
Déterminer la valeur de d_n en fonction de n.

3. On note L_n la distance en kilomètres parcourus au bout de n jours.
$L_n = d_1 + d_2 + \cdots + d_n$

a. Déterminer l'expression de L_n en fonction de n.

b. En déduire la limite de L_n lorsque n tend verse $+\infty$. Le globe-trotter peut-il gagner ?

c. A l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre minimal de jours N qui lui seraient nécessaires pour parcourir $4\,999\,km$

Exercice F.53

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{2}$ et la suite (R_n) définie, pour $n\geqslant 2$, par la somme :
$R_n = u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{2n}$

Déterminer la limite de la suite (R_n).

Exercice F.54

On définit :
la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = 13 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}\cdot u_n + \frac{4}{5} \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

la suite (S_n), pour tout entier naturel n, par :
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :
$u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$.

En déduire la limite de la suite (u_n).

2. a. Déterminer le sens de variation de la suite (S_n).

b. Calculer S_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de la suite (S_n).

G. Dénombrement - Probabilités:

Exercice G.1

On dispose d'un jeu de 52 cartes. On tire l'une après l'autre deux cartes de ce jeu ; l'ordre de tirage des cartes a une importance :

1. Déterminer le nombre possible de réalisation de chacun des évènements suivants :

a. A : “*La première carte tirée est l'as de pique ; la seconde carte est un carreau*”.

b. B : “*La première carte tirée est une figure de pique ; la seconde carte est un carreau*”.

c. C : “*La première carte tirée est une figure de coeur ; la seconde carte est un coeur*”.

d. D : “*La première carte tirée est une figure ; la seconde carte est un coeur*”.

2. a. Combien de tirages différents est-il possible de réaliser ?

b. En déduire la probabilité de chacun des évènements de la question 1..

Exercice G.2

On étudie l'expérience aléatoire suivante : on jette deux dès de six faces et on effectue la somme de la valeur de chaque dès.

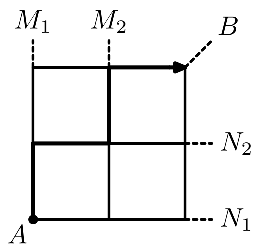
1. Compléter le tableau suivant :

+	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

2. Déterminer les probabilités des évenements suivants :
   a. Evenement A : "*on obtient 8*".
   b. Evenement B : "*on obtient une valeur supérieure ou égale à 6*".
   c. Evenement C : "*Un des dès a la valeur 4 et la somme est supérieure ou égale à 7*".
3. On s'intéresse maintenant à la valeur de chaque dès; déterminer la probabilité pour les évenements suivants :
   a. Evenement D : "*les deux dés ont la même valeur*".
   b. Evenement E : "*on obtient 6 et 4*".
   c. Evenement F : "*un des dès a la valeur 3 et l'autre a une valeur paire*".

Exercice G.3

On considère un mobile se déplaçant sur le quadrillage ci-dessous uniquement par des déplacements vers le haut et vers la droite :



le mobile choisit une sortie en prenant une partie en pointillé : alors, le jeu s'arrête.

1. Combien de chemin font sortir le mobile en M_1 ? en M_2 ?

Par symétrie de la figure et des déplacements du mobile, on admet qu'il y a autant de chemins permettant au mobile sortant en N_1 et en N_2 que, respectivement, en M_1 et M_2 :

2. Déterminer le nombre de chemin permettant de sortir en B.
3. En choisissant au hasard un des chemins possibles, quel est la probabilité que ce chemin fasse sortir le mobile en B.

Exercice G.4

Une urne contient quatre boules portant respectivement les lettres A, B, C et D. Un participant au jeu doit tirer tour à tour trois boules sans les remettre dans l'urne et noté le mot formé par ses trois lettres.

1. Construire l'arbre de choix correspondant à cette expérience aléatoire.
2. Déterminer la probabilité des évènements suivants :
   a. A : "*Le mot commence par la lettre A et termine par la lettre D*" ;
   b. B : "*Le mot contient la lettre A et la lettre D*" ;
   c. C : "*Le mot contient la séquence AB*".

Exercice G.5

On considère un jeu de 32 cartes. Déterminer le nombre de différentes réalisations possibles de chacun des éléments suivants :

1. a. A : "*La carte tirée est un carreau*".
   b. B : "*La carte tirée est un as*".
   c. C : "*La carte tirée est une figure*".
   d. D : "*La carte tirée est de couleur rouge*".
2. Déterminer le cardinal de chacun des évènements suivants :
   a. $A\cap B$ b. $B\cap C$ c. $B\cup D$

Exercice G.6

On considère un dé équilibré dont les six faces sont numérotées de 1 à 6.

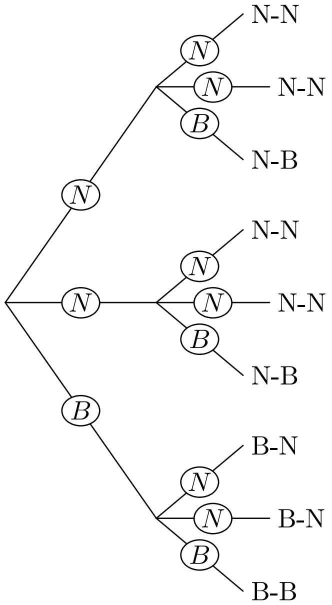
On considère les trois événements suivants :
A : "*Le nombre obtenu est 5*" ;
B : "*Le nombre obtenu est strictement supérieur à 3*" ;
C : "*Le nombre obtenu est impair*" ;

1. Déterminer la probabilité des événements A, B, C.
2. Décrire les événements élémentaires composants chacun des événements suivants :
   $A\cup B$; $B\cap C$; $A\cup\overline{B}$; $B\cap\overline{C}$
3. Déterminer la probabilité des événements suivants :
   $A\cup B$; $B\cap C$; $A\cup\overline{B}$; $B\cap\overline{C}$

Exercice G.7

Une urne contient deux boules noires et une boule blanche; le jeu se fait avec remise de la boule tirée : c'est à dire qu'une fois tirée, la boule est remise dans l'urne avant d'effectuer le tirage suivant.

Voici un arbre de décision basée sur le tirage de deux boules :

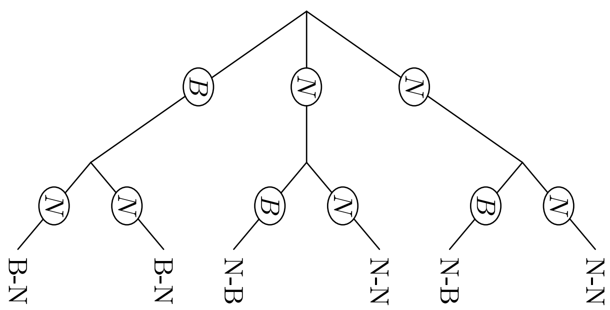


1. En tenant compte de l'ordre de tirage des boules, quel est le nombre possible de tirages différents ?
2. Déterminer la probabilité des évènements suivants :
   a. A : "*La première boule tirée est blanche*".
   b. B : "*Les deux boules tirées sont de couleurs différents*".
   c. C : "*La seconde boule est une boule noire*".
3. Donner les probabilités des évènements suivants :
   a. $A \cap B$ b. $\overline{B}$ c. $\overline{C}$

Exercice G.8

Une urne contient deux boules noires et une boule blanche ; le jeu se fait sans remise de la boule tirée : c'est à dire qu'une fois tirée, la boule est écartée du jeu.

Voici un arbre de décision basée sur le tirage de deux boules :

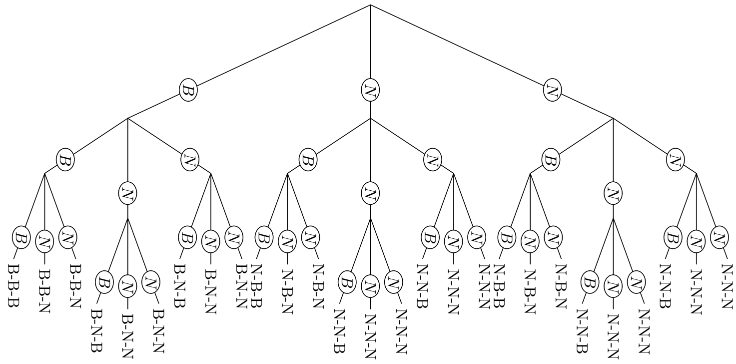


1. En tenant compte de l'ordre de tirage des boules, quel est le nombre possible de tirages différents ?
2. Déterminer la probabilité des évènements suivants :
   a. A : "*La première boule tirée est blanche*".
   b. B : "*La seconde boule tirée est blanche*".
   c. C : "*Les deux boules tirées sont de couleurs distinctes*".
3. Donner les probabilités des évènements suivants :
   a. $A \cap B$ b. $A \cap C$ c. $\overline{C}$

Exercice G.9

Une urne contient deux boules noires et une boule blanche ; le jeu se fait avec remise de la boule tirée : c'est à dire qu'une fois tirée, la boule est remise dans l'urne avant d'effectuer le tirage suivant.

Voici un arbre de décision basé sur le tirage de trois boules :



1. En tenant compte de l'ordre de tirage des boules, quel est le nombre possible de tirages différents ?
2. Déterminer la probabilité des évènements suivants :
   a. A : "*La première boule tirée est blanche*".
   b. B : "*Les trois boules tirées sont de même couleur*".
   c. C : "*Au moins deux boules tirées sont de la même couleur*".
3. Donner les probabilités des évènements suivants :
   a. $A \cap B$ b. $A \cap C$ c. $\overline{C}$

Exercice G.10

On considère un jeu de 32 cartes où le participant doit tirer au hasard une carte et les quatres évènements suivants

A : "*la carte tirée est un roi*" ;

B : "*la carte tirée est une figure rouge*" ;

C : "*la carte tirée est un coeur*" ;

D : "*la carte tirée est un nombre*"

1. Déterminer la probabilité des quatres évènements A, B, C et D.
2. Déterminer la probabilité des évènements suivants :
   $\overline{A}$; $\overline{A} \cap C$; $A \cap C$; $B \cap C$; $C \cup B$
   $\overline{B} \cup C$; $B \cup \overline{C}$

Exercice G.11

Une expérience aléatoire consiste à tirer au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.

1. Déterminer les probabilités des évènements suivants :
   A : "*La carte tirée est un pique*" ;
   B : "*La carte tirée est une figure*" ;
   C : "*La carte tirée est noire*" ;
   D : "*La carte tirée est le valet*" ;
2. Déterminer les probabilités des évènements suivants :
   a. $A \cap B$ b. $A \cap C$ c. $A \cup B$ d. $B \cup C$
   e. $C \cap D$ f. $C \cup D$ g. $C \cap \overline{D}$ h. $\overline{C} \cup \overline{D}$

Exercice G.12

Un dé dodécaédrique comporte 12 faces identiques numérotées de 1 à 12. On suppose ses faces ont chacune

la même probabilité de sortie.
Lors d'un jé, on note la face supérieure du dé.

On considère les évènements :

A : "*Le nombre obtenu est pair*"

B : "*Le nombre obtenu est supérieur ou égal à 9*"

C : "*Le nombre obtenu est strictement inférieure à 6*"

1. Déterminer les probabilités des évènements A, B et C.

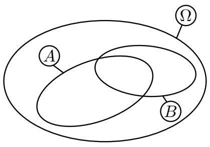
2. Donner, sans,justification, les probabilités des évènements suivants :

a. $A \cap B$ b. $\overline{A} \cap B$ c. $B \cap C$

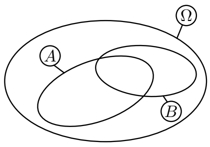
d. $B \cup C$ e. $B \cap \overline{C}$ f. $A \cup \overline{C}$

Exercice G.13

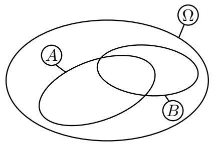
Ci-dessous sont représentés l'univers Ω d'une expérience aléatoire et deux évènements A et B de Ω. Pour chacune des représentations ci-dessous, hachurer l'ensemble demandé.



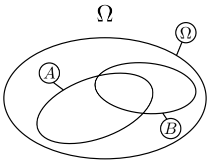
Ω



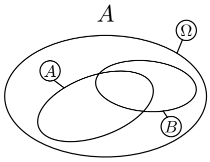
A



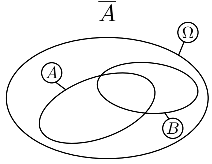
$\overline{A}$



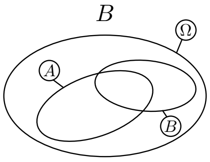
B



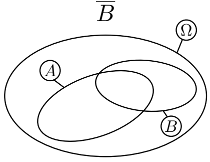
$\overline{B}$



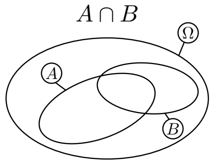
$A \cap B$



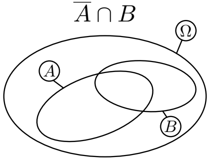
$\overline{A} \cap B$



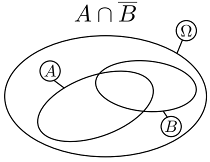
$A \cap \overline{B}$



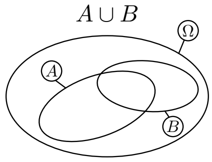
$A \cup B$



$\overline{A} \cup B$



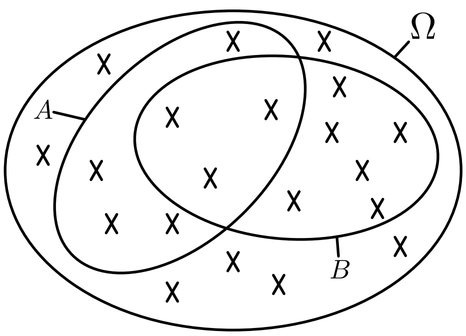
$A \cup \overline{B}$



$\overline{A} \cup \overline{B}$

Exercice G.14

On considère une expérience aléatoire dont l'univers Ω est représenté ci-dessous. On considère également deux évènements A et B de Ω :



Les croix représentent les évènements élémentaires composant Ω ; chacun des évènements élémentaires sont équiprobables.

1. Combien d'évènements élémentaires composent l'univers Ω.

2. Déterminer les probabilités de A et de B.

3. a. Déterminer les probabilités des deux évènements suivants :

$A \cup B \quad ; \quad A \cap B$

b. Ecrire une relation entre les probabilités suivantes :

$\mathcal{P}(A) \quad ; \quad \mathcal{P}(B) \quad ; \quad \mathcal{P}(A \cup B) \quad ; \quad \mathcal{P}(A \cap B)$

Exercice G.15

Une urne contient vingt boules numérotés de 1 à 20 ; les cinq premières sont rouges, les sept suivantes sont bleues, les huit suivantes sont jaunes.

1. Déterminer les probabilités suivantes :

a. A : "*La boule tirée porte un numéro pair*" ;

b. B : "*La boule tirée est rouge*" ;

c. C : "*La boule tirée est rouge ou porte un numéro pair*" ;

d. D : "*La boule tirée est rouge et porte un numéro pair*".

2. Que peut-on dire de l'égalité suivante ?

$\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B)$

Exercice G.16

Soit $(\Omega ; \mathcal{P})$ un espace probabilisé où A et B sont deux événements de Ω tels que :

$\mathcal{P}(A) = 0{,}36 \quad ; \quad \mathcal{P}(B) = 0{,}27$

1. Que peut-on dire de A et de B si $\mathcal{P}(A \cup B) = 0{,}63$?

2. On suppose que $\mathcal{P}(A \cup B) = 0{,}5$:

a. Que peut-on dire de A et de B ?

b. Quelle est la probabilité qu'un événement réalise simultanément les événements A et B.

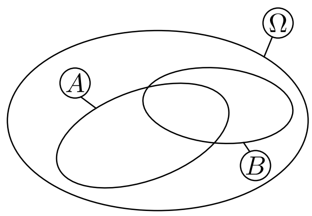
Exercice G.17

Dans un univers Ω muni de la loi de probabilité $\mathcal{P}$, on considère les deux événements A et B tels que :

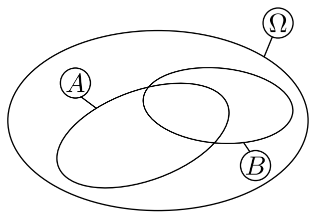
$\mathcal{P}(A) = 0{,}37 \quad ; \quad \mathcal{P}(B) = 0{,}48 \quad ; \quad \mathcal{P}(A \cup B) = 0{,}62$

1. Déterminer la valeur de $\mathcal{P}(A \cap B)$.

2. Représenter ci-dessous les deux ensembles indiquées sous chacune des figures :



$\overline{A} \cap B$



$\overline{A} \cup B$

3. a. Déterminer la probabilité des événements suivants :

$\overline{A} \quad ; \quad \overline{A} \cap B$

b. En déduire la probabilité de l'événement $\overline{A} \cup B$.

Exercice G.18

Dans un établissement du secondaire, une évènement sportif regroupe les élèves pratiquant le football et le basket-ball. On choisit un èlève au hasard et on note :

F : "*L'élève choisit pratique le football*"

B : "*L'élève choisit pratique le basket-ball*"

1. On donne la probabilité suivante :
   $\mathcal{P}(\overline{F \cup B}) = 0{,}6$

   Donner la probabilité de choisir un élève participant à cet évènement.

2. On donne les probabilités suivantes :
   $\mathcal{P}(F) = 0{,}28 \quad ; \quad \mathcal{P}(B) = 0{,}22$

   Sachant que dans cet établissement, il y a 30 élèves de seconde pratiquant à la fois le basket-ball et le football, déterminer le nombre d'élèves de secondes dans cet établissement.

Exercice G.19

Une entreprise d'horlogerie vérifie son stock composé de 500 montres d'un même modèle. Il est particulièrement qttentif aux défauts sur le bracelet et sur le cadran de chaque montre.

On considère les deux évènements suivants :
B : "*la montre possède un défaut sur le bracelet*"

C : "*la montre possède un défaut sur le cadran*"

1. Sachant que sur son stock, 20 montres présentent un défaut sur le bracelet et 36 présentent un défaut sur le cadran, déterminer la probabilité des évènements B et C.
2. La probabilité de choisir au hasard une montre possédant au moins un défaut est de 0,1.
   a. Déterminer la probabilité de choisir une montre présentant les deux défauts.
   b. En déduire le nombre de montres possédant les deux défauts recherchés.

Exercice G.20

Une urne contient 4 boules noires et 3 boules rouges indiscernables au toucher.

On tire deux boules au hasard simultanément.

1. On considère l'évènement :
   A : "*les deux boules tirées sont de la même couleur*".

   Déterminer la probabilité de l'évènement A.

2. On considère l'évènement :
   A : "*une seule des deux boules tirées est rouge*".

   Déterminer la probabilité de l'évènement B.

Exercice G.21

Pour chacune des questions suivantes, une ou deux des réponses proposées sont correctes. Aucune justification n'est attendue :

1. On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes.
   La probabilité de n'obtenir ni un as, ni un pique, est égale à :

   a. $\dfrac{5}{8}$ b. $\dfrac{21}{32}$ c. $\dfrac{11}{32}$ d. $\dfrac{3}{8}$

2. On tire au hasard et simultanément deux cartes d'un jeu de 32 cartes. La probabilité de n'obtenir ni un as, ni un pique, est égale à :

   a. $\dfrac{105}{248}$ b. $\dfrac{\binom{21}{2}}{\binom{32}{2}}$ c. $\dfrac{21^2}{32^2}$ d. $\dfrac{5^2}{8^2}$

H. Géometrie plane :

Exercice H.1

Soient A, B deux points distincts fixés d'un cercle $\mathscr{C}$ de centre I et M un point quelconque de ce cercle $\mathscr{C}$.

Le point D est défini par : $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{ID}$

1. Prouver que les produits scalaires $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AM}$ sont nuls.

   En déduire à quelles droites particulières du triangle ABM le point D appartient puis préciser la nature du point D pour le triangle AMB.

2. Soit G l'isobarycentre des points A, B, M. Exprimer $\overrightarrow{ID}$ en fonction de $\overrightarrow{IG}$.

Exercice H.2

On considère un tétraèdre $ABCD$ et on note H le projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD).

Démontrer que, si les hauteurs du tétraèdre $ABCD$ issues des points A et B sont concourantes, alors la droite (BH) est une hauteur du triangle BCD.

Exercice H.3

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\,;\overrightarrow{j}\right)$, on donne les points :

$A(2\,;1\,;3) \quad ; \quad B(-3\,;-1\,;7) \quad ; \quad C(3\,;2\,;4)$

1. Déterminer les coordonnées du point H barycentre du système :
   $\left\{(A\,;-2)\,;(B\,;-1)\,;(C\,;2)\right\}$

2. Déterminer la nature de l'ensemble Γ_1, des points M de l'espace tels que :
   $$\left(-2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right) = 0$$
   En préciser les éléments caractéristiques.

3. Déterminer la nature de l'ensemble Γ_2, des points M de l'espace tels que :
   $$\left\| -2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right\| = \sqrt{29}$$
   En préciser les éléments caractéristiques.

Exercice H.4

On considère deux points A et D de l'espace et on désigne par I le milieu du segment $[AD]$.

1. Démontrer que, pour tout point M de l'espace :
   $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MA} = MI^2 - IA^2$

2. En déduire l'ensemble (E) des points M de l'espace, tels que :

$\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MA}=0$

Exercice H.5

Soit A et B deux points distincts du plan.

1. Caractériser l'ensemble des points tels que :

   a. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=0$ b. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=AB^2$

   c. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=-AB^2$

2. On suppose que $AB=6$. Caractériser l'ensemble des points tels que :

   a. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=18$ b. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=-1$

Exercice H.6

Dans l'espace, on considère deux points A et B distincts tels que $AB=4$. On note I le milieu du segment $[AB]$:

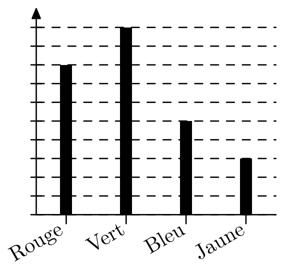
1. Démontrer que pour tout point M de l'espace, on a l'égalité :
   $MA^2-MB^2=2\cdot\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}$

2. Déterminer l'ensemble des points M vérifiant :
   $MA^2-MB^2=16$

I. Statistiques :

Exercice I.1

On a demandé a des étudiants d'indiquer leur couleur préférée parmi le rouge, le vert, le bleu et le jaune. Les résutlats de cette étude est donnée dans le diagramme ci-dessous :



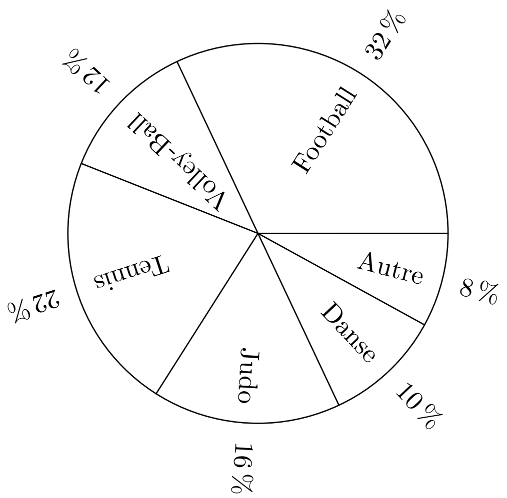
Malheureusement la graduation de l'axe des ordonnées a été effacée.

1. Quel est le pourcentage des personnes ayant choisies la couleur "rouge".

2. Dresser le diagramme circulaire correspondant à cette étude.

Exercice I.2

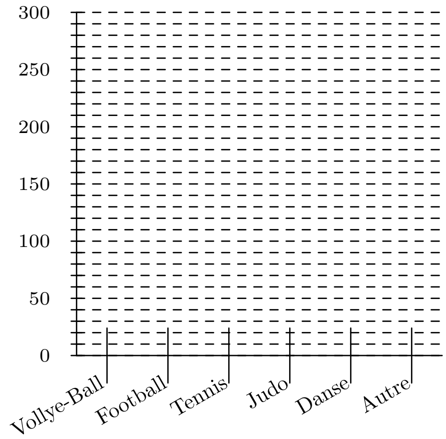
Dans un établissement, une étude a porté sur le sport préféré des adolescents de 14 ans et 16 ans. Les résultats sont résumés dans le diagramme ci-dessous :



1. Cette étude a portée sur une population dont l'effectif total était de 879 individus. Compléter le tableau des effectifs, à l'unité près :

Sport	Volley ball	Football	Tennis	Judo	Danse	Autre
Effectif						

2. Compléter le graphique ci-dessous pour obtenir le diagramme en baton associé à cette série statistique.



Exercice I.3

Le tableau ci-dessous donne les prix du litre d'essence trois années distinctes :

Année	1973	1980	1998
Prix *(en centimes)*	121	327	638

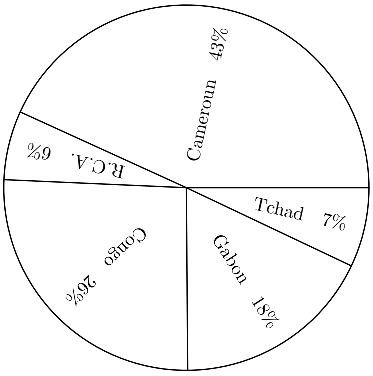
On donnera les résultats aux questions suivantes arrondies au dixième près.

1. Calculer les pourcentages d'augmentation de 1973 à 1980, puis de 1980 à 1998.

2. Calculer le pourcentage d'augmentation de 1973 à 1998.

Exercice I.4

Le diagramme circulaire représente l'endettement en 2003 de 5 pays d'Afrique centrale. Il a été obtenue sur le site de la Banque Mondiale. On sait uniquement que le Cameroun avait une dette de 9,1 milliard de dollars en 2003.



On arrondira toutes les valeurs trouvés au dixième de milliard.

1. En déduire la dette de l'ensemble de ces cinq pays d'Afrique centrale.
2. Donner l'endettement du Tchad en 2003.

(Chiffres tirées de Jeune Afrique 2006)

Exercice I.5

Paul, Marie et Laurent se réunissent pour acheter acheter la PlagaStation3. Voici le tableau récapitulatif des sommes versées par chacun d'eux :

Paul	Marie	Laurent
172	135	251

1. Pour chaque personne, déterminer le pourcentage de la somme versée relativement au prix total. On arrondira le résultat au dixième près.
2. S'ils avaient partagé équitablement l'achat de cette console de jeux, quelle aurait-elle la somme versée par chacun d'eux ?

Exercice I.6

Un métal précieux est obtenu par un mélange dont le poid est constitué de 60 % de cuivre et de 40 % d'argent. 100 g de cuivre coûte 2 euros et 100 g d'argent coûte 25 euros.

1. a. Un bijoutier confectionne une bague de 120 g de cet alliage. Calculer le prix de revient de cette bague.
   b. Souhaitant réaliser un bénéfice de 15 % sur la vente de la bague, quel doit être le prix de vente de cette bague ?
2. Sur un an, les cours des métaux précieux ont évolués : le cuivre a augmenté de 30 % et l'argent de 7 %.
   a. Déterminer le nouveau prix de confection de cette bague.
   b. Donner le pourcentage d'augmentation du prix de confection de cette bague sur un an.

Exercice I.7

Dans une usine de conditionnement des bouteilles d'eau minérale, une étude statistique s'est intéressée à mesurer le remplissage des bouteilles en bout de chaînes.

Voici un tableau récapitulant les données recueillies :

Volume d'eau (*en ℓ*)	1,35	1,40	1,45	1,50	1,55	1,60
Nombre de bouteilles	23	79	378	562	35	4

Les machines procédant au remplissage des bouteilles sont considérées comme "*bien réglées*" si elles vérifient les deux conditions suivantes :

Les bouteilles dépassant un volume d'eau de 1,5 ℓ ne doivent pas représenter plus de 5 % des bouteilles testées.

La fréquence des bouteilles non-contenues dans l'intervalle $[1{,}45\,;\,1{,}55]$ ne doit pas dépasser 10 %.

Déterminer si les machines de cette usine sont "*bien réglées*". Justifier toutes vos affirmations.

Exercice I.8

1. Calculer la moyenne des nombres suivants :

   8 ; 9 ; 12 ; 13 ; 10 ; 5,5 ; 7

2. a. Donner la moyenne de cette série si on retranche 2 à chacune des valeurs de la série.
   b. Donner la moyenne de cette série si on multiplie chacune des valeurs de la série par 2.

Exercice I.9

Voici les moyennes annuelles et les coefficients du bac que chacun d'eux présentent.

	FR.	Ph	Ma	LV1	LV3	HGE	ESC	EPS	ECO	SPE
Alain	11	12	5	12	9	12	1	7	×	8
Bac L	5	7	2	4	4	4	2	2	×	4

	FR.	Ph	Ma	LV1	LV3	HGE	ESC	EPS	ECO	SPE
Anne	12	5	9	12	11	5	5	13	15	9
Bac ES	4	4	5	3	3	5	2	2	7	2

	FR.	Ph	Ma	LV1	HGE	SVT	PHY	EPS	SPE
Henry	5	2	15	8	10	9	12	11	15
Bac S	4	3	7	3	3	6	6	2	2

1. En ayant au bac les mêmes notes que ses moyennes annuelles, Henry aura-t-il le bac ?
2. a. Justifier qu'Alain n'aura pas le bac avec ses moyennes annuelles et qu'il passera au rattrapage.
   b. En choisissant les mathématiques comme matière de rattrapage, quel note minimale doit-il avoir pour obtenir le baccalauréat.

Exercice I.10

Voici les 25 notes d'élèves de troisième lors d'un contrôle :

10,5 - 4,5 - 9,25 - 11 - 8,5 - 8,5 - 15,5 - 5 - 13,5

7,5 - 6,5 - 12,5 - 15 - 13,25 - 17,25 - 5,75 - 2 - 13,25

15,5 - 6,5 - 7,25 - 12,75 - 7,25 - 15 - 8,75

1. Calculer la moyenne de ces notes.

2. On décide maintenant d'étudier cette série statistique via le tableau des effectifs correspondants :

a. Remplir le tableau des effectifcs ci-dessous :

Note	$[0\,;2[$	$[2\,;4[$	$[4\,;6[$	$[6\,;8[$	$[8\,;10[$	$[10\,;12[$
Effectif						

Note	$[12\,;14[$	$[14\,;16[$	$[16\,;18[$	$[18\,;20]$
Effectif				

b. Déterminer la moyenne de cette série mais calculée à partir du tableau des effectifs.

Exercice I.11

Dans un lycée, nous étudions la taille de trois groupes d'élèves participant à l'A.S. Voici un tableau récapitulatif de leurs tailles :

Groupe A		
$[1{,}50\,;1{,}60[$	$[1{,}60\,;1{,}70[$	$[1{,}70\,;1{,}80[$
2	5	3

Groupe B		
$[1{,}50\,;1{,}60[$	$[1{,}60\,;1{,}70[$	$[1{,}70\,;1{,}80[$
0	5	6

Groupe C		
$[1{,}50\,;1{,}60[$	$[1{,}60\,;1{,}70[$	$[1{,}70\,;1{,}80[$
3	4	1

Les différents calculs de moyenne seront arrondis au centième près.

1. Calculer la taille moyenne de chaque groupe d'étude.

2. Calculer la taille moyenne pour l'ensemble des trois groupes.

3. On décide d'utiliser le tableau suivant :

	Groupe A	Groupe B	Groupe C
Effectif total	10	11	8
Taille moyenne du groupe	1,66	1,70	1,63

a. Déterminer la taille moyenne des trois groupes en vous servant du tableau ci-dessus.

b. Que remarquez vous ?

Exercice I.12

Une série statistique a une moyenne de 21 alors que la somme de la liste de ses valeurs vaut 273.

De combien de nombres cette série statistique est-elle composée ?

Exercice I.13

Nombre d'enfants	Nombre de couples (en milliers)
0	5420
1	3048
2	2880
3	1233
4 et plus	651

Ce tableau représente le nombre de couples dont les enfants, de moins de 25 ans, vivent encore sous le toit familial.

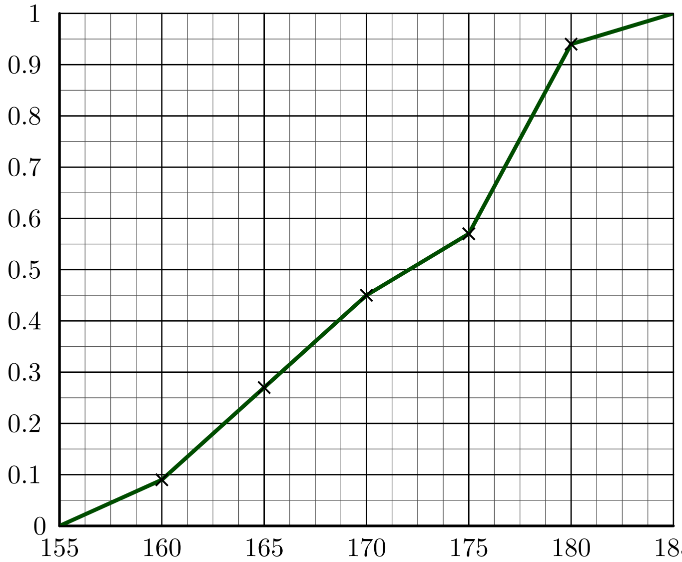
1. Quelle est la classe modale de cette série statistique ?

2. Si chacun des 651 000 couples de la ligne "4 et plus" avait exactement 4 enfants, quelle serait le nombre d'enfants, en moyenne, par couple ?

3. Une autre étude affirme que le nombre moyen d'enfants de moins de 25 ans vivant encore chez leur parent est de 1,18. Calculer le nombre moyen d'enfants, parmi les 651 000 couples qui ont 4 enfants et plus, vivants encore dans leur foyer.

Exercice I.14

Le graphique ci-contre représente le polygone des fréquences cumulés croissante d'une série statistique représentant la taille d'un échantillon d'élève d'un lycée.



Ce diagramme a été tracé à partir d'un tableau des effectifs où les éléves ont été rangés dans les classes :

$[155\,;160[$; $[160\,;165[$; $[165\,;170[$

$[170\,;175[$; $[175\,;180[$; $[180\,;185[$

1. Déterminer, approximativement la fréquence associée à la classe $[155\,;160[$

2. Déterminer, approximativement la fréquence associée à la classe $[175\,;180[$

3. Déterminer la médiane de cette série statistique.

4. Déterminer le premier et troisième quartile de la série.

Exercice I.15

On dispose d'une série statistique qu'on partage en deux sous-groupes.

1. Le premier sous-groupe a une moyenne de 12 et on sait que la somme des valeurs de la série vaut 288.
Déterminer l'effectif de ce sous groupe.

2. Le second groupe a une moyenne de 11,5 et son effectif est de 20.
Calculer la moyenne de la série complète.

Exercice I.16

On effectue les pesées de 40 judokas avant une compétition. Le poids moyen ainsi calculé est de 72 kg. On se rend compte que la balance qui a été utilisée est mal réglée et qu'elle indique 500 g de moins que le poids réel.
Quel est le poids moyen réel des 40 judokas ?
Quelle propriété de la moyenne avait vous utilisée ?.

Exercice I.17

Dans un lycée sont répartis de la manière suivante :

7 classes de Seconde avec en moyenne 32 élèves par classe.

5 classes de première avec en moyenne 28 élèves par classe.

4 classes de Terminales avec une moyenne 25 élèves par classe.

1. Déterminer le nombre d'élèves que comporte chaque niveau.

2. Combien de classe cet établissement compte-t-il au total ?

3. En déduire la moyenne du nombre d'élèves par classe pour cet établissement.

Exercice I.18

Dans un lycée, il y a quatre classes de seconde contenant respectivement 30, 35 ,28 et 25 élèves.
Les moyennes des notes d'éducation physique de ces classes sont respectivement 12, 11, 13 et 14.
Quelle est la moyenne des notes d'éducation physique pour l'ensemble des quatre classes de seconde du lycée.

Exercice I.19

La fin du trimestre arrive et les derniers contrôle se rapprochent. Un élève réfléchit à améliorer sa moyenne :

1. Au bout de quatre contrôles, sa moyenne était de 11. Quel était la somme de ses notes ?

2. Sa cinquième note est 13. Quel est sa nouvelle moyenne ?

3. Un sixième et dernier contrôle se préparant, il souhaite terminer ce trimestre avec une moyenne de 12. Quelle note doit-il obtenir à ce dernier contrôle ?

Exercice I.20

1. Dans une classe de 31 élèves, la moyenne d'âge des élèves est de 15,5 ans. En tenant compte de l'âge du professeur de mathématique, la moyenne de la classe passe à 15,86 ans.

   Déterminer l'âge du professeur.

2. Dans une classe de 33 élèves, la moyenne annuelle des notes de mathématiques des 18 filles est de 12,4, et celle des garcons est 11,2.

   Quelle est la moyenne des notes en mathématiques de la classe ?

Exercice I.21

1. En milieu de trimestre, un élève a 11 de moyenne. Au contrôle suivant, l'élève obtient une note de 13 et sa moyenne passe à 11,5. Combien alors a-t-il eu de notes ?

2. Avant la fin du trimestre, cet élève a une moyenne de 12,75 avec 5 notes. Quel note doit-il obtenir, à la dernière note du trimestre, afin d'avoir une moyenne de 13 ?

Exercice I.22

Voici Les résultats du recensement démographique de la population française organisée en 2007.

Classe d'âge	[0 ; 20[	[20 ; 65[	[65 ; 100]	Effectif total
Population	24,9 %	58,8 %	16,3 %	63 753 140

(pour cet exercice, on suppose la population âgée de plus de 100 ans d'effectif négligeble)

1. Déterminer le nombre d'individu de la population française ayant moins de 20 ans.

2. Déterminer l'âge moyen des français.

Exercice I.23

Une étude est portée sur la population de trois pays : l'Allemagne, l'Espagne et la France.

Voici un tableau précisant la démographie de chacun de ces pays en 1998 :

Pays	*Allemagne*	*Espagne*	*France*
Population *(en millions)*	82,3	39,4	58,8
Personnes de plus de 25 ans *(en %)*	68,3	56	70,7

Déterminer la fréquence, en pourcentage arrondie au dixième près, des personnes agée de plus de 25 ans sur l'ensemble des ces trois pays

Exercice I.24

Dans un groupe d'étude, on a relevé la taille de chacun des élèves. Ce qui nous a permit d'obtenir la série statistique suivante :

1m 62 ; 1m 55 ; 1m 58 ; 1m 51 ; 1m 60 ; 1m 73 ; 1m 69 ; 1m 65

1m 62 ; 1m 54 ; 1m 66 ; 1m 56 ; 1m 59 ; 1m 60 ; 1m 64

1. Donnez l'effectif total de ce groupe.

2. Calculez la taille moyenne de ce groupe ; on arrondira cette valeur au centimètre près.

3. On construit des classes d'amplitude cinq centimètre. Compléter le tableau suivant :

Classes	[1,50;1,55[	[1,55;1,60[	[1,60;1,65[	[1,65;1,70[	[1,70;1,75[
Effectif					
Effectif cumulé croissant					
Effectif cumulé décroissant					
Fréquence *(en %)*					
Fréquence cumulé décroissante *(en %)*					

4. a. Combien de personnes mesurent au plus $1m\,65$?
   b. Combien de personnes mesurent plus de $1m\,65$?
   c. Combien de personnes mesurent au moins $1m\,60$?

Exercice I.25

En étudiant, sur une classe, la durée du déplacement pour se rendre à l'école. Voici l'ensemble de ces durées :

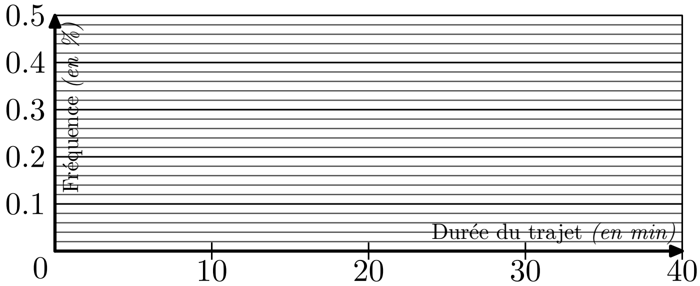
5 ; 15 ; 15 ; 25 ; 5 ; 38 ; 37 ; 20 ; 3 ; 15 ; 7 ; 2 ; 30 ; 10

16 ; 2 ; 5 ; 5 ; 20 ; 25 ; 25 ; 30 ; 3 ; 11 ; 25 ; 8 ; 13

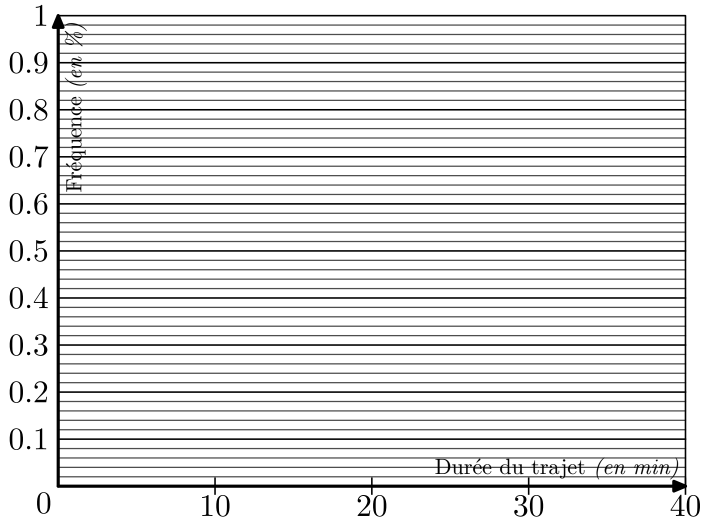
1. Compléter le tableau ci-dessous en arrondissant les fréquences au millième près.

Classe *(en min)*	$[0\,;10[$	$[10\,;20[$	$[20\,;30[$	$[30\,;40[$
Effectif				
Fréquence				
Fréquence Cumulé Croissant				

2. Construire l'histogramme des fréquences ci-dessous :



3. Construire la courbe des fréquences cumulées croissantes :



Exercice I.26

On a relevé la taille, en centimètre, de vingt athlètes :

178 - 176 - 172 - 184 - 182 - 182 - 174 - 176 - 184 - 180

180 - 176 - 180 - 174 - 172 - 176 - 180 - 182 - 176 - 180

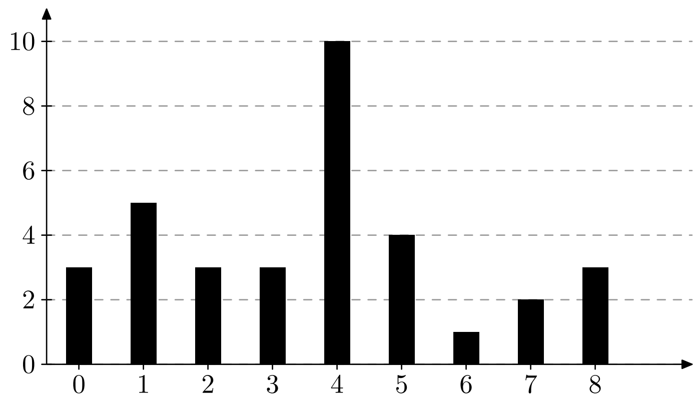
1. Calculer la taille moyenne de cette série statistique *(arrondir au dixième près)*.
2. a. Ordonner l'ensemble des tailles relevées.
   b. En déduire la valeur médiane de cette série statistique.
3. En regroupant les tailles relevées en classe de $5\,cm$ d'amplitude :

   $[170; 175[$; $[175; 180[$; $[180; 185[$; $[185; 190[$

   Construire l'histogramme associé.

Exercice I.27

On a demandé à des adolescents de 14 ans à 18 ans, combien de fois ils allaient au cinéma par mois. Le diagramme en barres ci-dessous présente leurs réponses



1. Recopier et compléter le tableau ci-dessous :

Nombre de séance par mois	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Effectif									
Effectif. cum. croissant									

2. Combien, en moyenne, un adolescent voit-il de films par mois ? *(arrondir au dixième près)*.
3. Donner l'étendue de cette série statistique.

4. Quel est la classe modale ?

5. A l'aide de la ligne des effectifs cumulés croissants :

   a. Déterminer la médiane de cette série statistique.

   b. Déterminer le premier et troisième quartile.

Exercice I.28

1. Voici les notes de quatres groupes d'élèves au brevet blanc. Remplissez les cases des différents indicateurs ci-dessous :

	Groupe 1	Groupe 2	Groupe 3	Groupe 4
Notes	5 - 6 - 10 10 - 11 - 12 12 - 14	6 - 8 - 8 - 8 10 - 11 - 14 15	8 - 8,5 - 8,5 9 - 11 - 11 12 - 12	6 - 6 - 7 - 8 10 - 11 - 11 15
Moyenne				
Etendue				
Médiane				

2. Comparer d'un point de vue qualitatif à la lueur des indicateurs calculées précédemment :

   a. Le groupe 1 et le groupe 2 ;

   b. Le groupe 2 et le groupe 4 ;

   c. Le groupe 1 et le groupe 3.

Exercice I.29

Un sondage a été effectué auprès des élèves des classes de seconde d'un établissement afin de connaître la distance qui séparent ces élèves de leur établissement. Voici le tableau résumant cette étude :

Distance *(en km)*	[0; 5[	[5; 10[	[10; 15[	[15; 20[	[20; 25[	[25;30[
Fréquence *(en %)*	14	30	25	18	8	5

1. Déterminer en moyenne la distance parcourue par un élève pour rejoindre son établissement.

2. a. Déterminer la médiane de cette série statistique.

   b. Déterminer le premier et le troisième quartile.

Exercice I.30

Voici le tableau des effectifs des notes des élèves lors du brevet des collèges :

Note	[0 ; 4[	[4 ; 8[	[8 ; 12[	[12 ; 16[	[16 ; 20[
Effectif	5	32	61	80	15
Fréquence *en %*					
Fréquence cumulée croissante					

1. Donner la classe modale de cette série statistique.

2. Calculer la moyenne de l'établissement lors de cet examen.

3. a. Compléter les lignes des fréquences et fréquences cumulés croissantes du tableau ci-dessus.

   b. Construire un repère orthonormé où sera représenté sur l'axe des abscisses les notes *(1 cm = 2 points)* et sur les ordonnées *(1 cm = 10 % élèves)*.
   Représenter dans ce repère la courbe des fréquences cumulées croissants.

   c. En déduire la valeur de la médiane.
   (Laisser vos traits de constructions apparents)

Exercice I.31

On a étudié sur un groupe de 60 sportifs les fréquences cardiaques au repos *(FCR)*. C'est à dire le nombre de battements de coeur par minute après une longue période de calme et de repos. Voici les âges et les FCR de la population

Age	FCR
42	42
41	43
61	45
51	45
41	46
27	46
33	46
40	48
55	48
31	48
32	48
35	48
44	49
40	50
36	50

Age	FCR
50	50
35	50
24	50
23	50
52	50
36	51
31	51
35	51
60	51
29	52
30	52
49	52
32	52
40	52
47	52

Age	FCR
37	52
42	52
21	52
40	53
34	53
35	53
28	53
55	53
49	53
31	53
35	53
38	54
53	54
42	54
54	54

Age	FCR
41	54
31	55
50	55
32	55
22	55
42	55
52	55
18	57
51	59
22	59
23	59
53	59
50	59
28	59
47	60

On prendra comme caractères d'étude le FCR de la population d'étude :

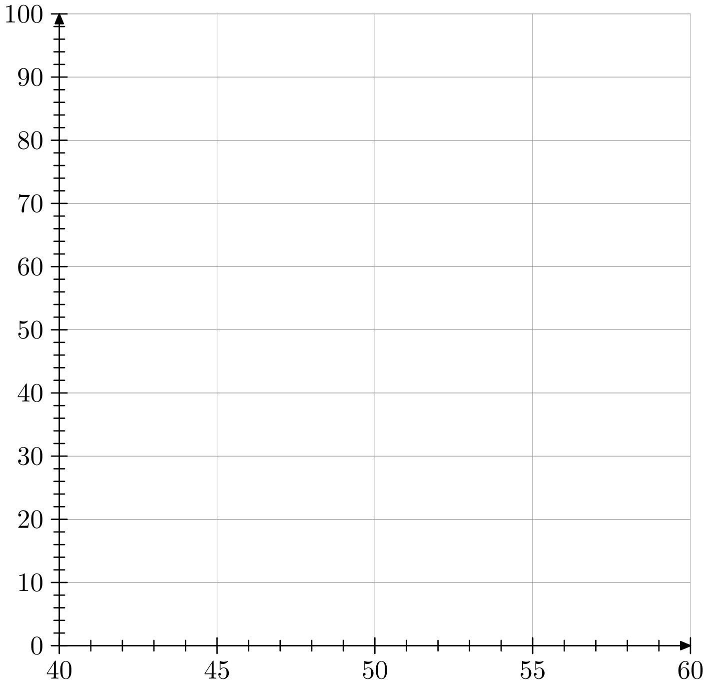
1. Donner la médiane de cette série statistique.

2. Remplisser le tableau suivant :

Classe	[40 ; 45[	[45 ; 50[	[50 ; 55[	[55 ; 60]
Effectif				
Fréquence				
Fréq cum croissante				

   Les fréquences seront exprimés en pourcentage à 0,1 % près.

3. a. Tracer dans le tableau ci-dessous, la courbe des fréquences cumulées croissantes dans le repère ci-dessous.



b. En laissant vos constructions sur la figure, donner l'abscisse du point de la courbe d'ordonnée 50 %

c. Donner une interprétation de ce résultat.

Exercice I.32

Jean, passionné d'un jeu vidéo, a relevé la durée en secondes des 40 parties qu'il a joué :

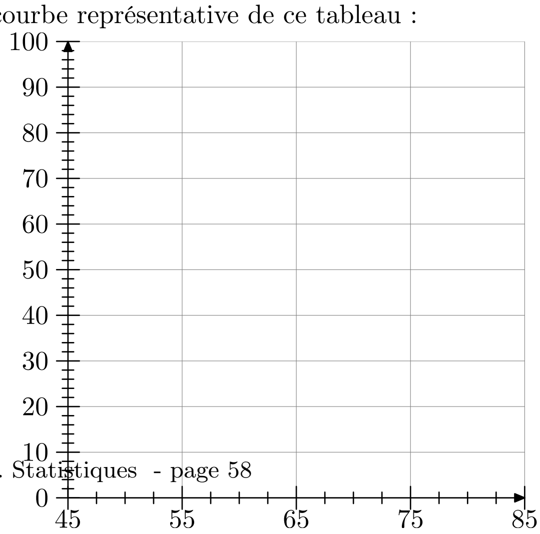
49	55	57	57	57	58	58	59	60	60	60	62	63	63	63	63	64	64	64	64
65	65	66	67	69	69	70	70	72	74	74	75	75	76	77	78	79	80	80	82

1. Donner la valeur médiane de cette série.
C'est à dire la durée tel que :
Le nombre de partie ayant une durée inférieure à celle-ci représente 50 % des parties considérées.
Ainsi, que les parties représentant une durée inférieure représentent également 50 %

2. a. Remplir le tableau ci-dessous :

Classe	$[45\,;\,50[$	$[50\,;\,55[$	$[55\,;\,60[$	$[60\,;\,65[$	$[65\,;\,70[$	$[70\,;\,75[$	$[75\,;\,80[$	$[80\,;\,85[$
Eff.								
Fréq.								
Fréq cum croiss.								

b. En considérant le centre de chaque classe, construire la courbe représentative de ce tableau :



c. Chercher à partir de ce graphique la valeur de la médiane

Exercice I.33

Voici les températures moyennes mensuelles relevées, entre 1994 et 2003, dans la ville de Sète au sud de la France :

Mois	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin
Température	8,3	9,4	12,1	13,5	17,5	21,2

Mois	Juillet	Août	Sept.	Octob.	Novem.	Décem.
Température	23,4	22,8	18,6	15,7	10,8	8,5

1. Déterminer la température moyenne annuelle pour la ville de Sète.

2. Les scientifiques estiment une augmentation globale de la température de $1{,}5^oC$ en 2020.
   a. Reproduire le tableau précédent en acceptant les prévisions des scientifiques.
   b. Calculer alors la température moyenne annuelle de cette ville en 2020.

Exercice I.34

On étudie le trajet effectué par les élèves des classes de secondes chaque jour pour se rendre de leur domicile au lycée. On relève le temps *(exprimé en minutes)* mis pour ce trajet :

Temps de transport par jour	$[0\,;\,10[$	$[10\,;\,30[$	$[30\,;\,40[$	$[40\,;\,50]$
Nombre d'élèves	32	54	17	3

1. a. Recopier le tableau ci-dessus, en y ajoutant les fréquences et les fréquences cumulées croissantes exprimées en pourcentage à 0,1 % près.
   b. Déterminer la classe médiane de cette série statistique.

2. Déterminer le temps moyen de transport, arrondi à la minute, par jour d'un élève de seconde de ce lycée.

3. a. Dans un repère orthogonal $(O\,;\,I\,;\,J)$ tel que :
$OI = 0{,}2\,cm \qquad OJ = 0{,}1\,cm$
Tracer le polygone des fréquences cumulées croissantes.
   b. Déterminer à l'aide de cette courbe, la valeur médiane de cette série statistique.

Exercice I.35

il faut que je refasse tous les exercices ; pour la courbe des frequences cumules, il faut que je ne prennes pas le milieu d'une classe mais mais les bornes de chaque borne ce qui représentera davantage l'interpolation lineaire.

J. Géometrie dans l'espace:

Exercice J.1

1. a. Placer le point D tel que $\overrightarrow{CD} = -3\cdot\overrightarrow{i} + 2\cdot\overrightarrow{j}$.

   b. Placer le point F tel que $\overrightarrow{EF} = -3\cdot\overrightarrow{i} - 4\cdot\overrightarrow{j}$

2. Compléter l'égalité suivante :

   $\overrightarrow{GK} = \ldots\cdot\overrightarrow{i} + \ldots\cdot\overrightarrow{j}$

3. Compléter les pointillés suivants :

   a. $\overrightarrow{u} = \ldots\cdot\overrightarrow{i}$

   b. $\overrightarrow{v} = \ldots\cdot\overrightarrow{j}$

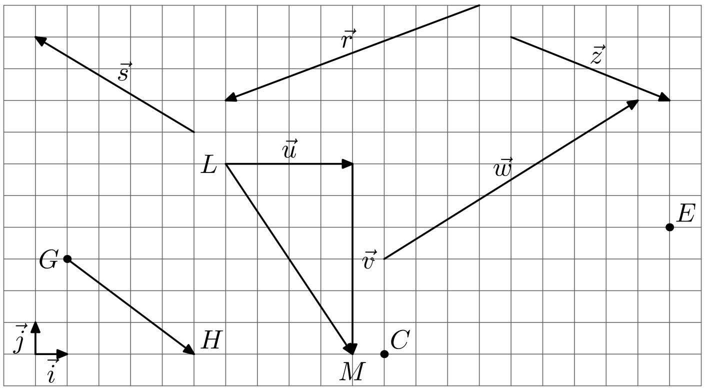
   c. $\overrightarrow{LM} = \ldots\cdot\overrightarrow{i} + \ldots\cdot\overrightarrow{j}$

   d. $\overrightarrow{w} = \ldots\cdot\overrightarrow{i} + \ldots\cdot\overrightarrow{j}$

   e. $\overrightarrow{z} = \ldots\cdot\overrightarrow{i} + \ldots\cdot\overrightarrow{j}$

   f. $\overrightarrow{r} = \ldots\cdot\overrightarrow{i} + \ldots\cdot\overrightarrow{j}$

   g. $\overrightarrow{s} = \ldots\cdot\overrightarrow{i} + \ldots\cdot\overrightarrow{j}$



Exercice J.2

1. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires en précisant le coefficient de colinéarité de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$:

   a. $\dfrac{1}{2}\cdot\overrightarrow{u} = \dfrac{3}{4}\cdot\overrightarrow{v}$

   b. $3\cdot\overrightarrow{u} - 2\cdot\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$

   c. $3\cdot\left(\overrightarrow{u} - 2\,\overrightarrow{v}\right) = \overrightarrow{0}$

   d. $-2\cdot\left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right) = 2\cdot\overrightarrow{u} + 3\cdot\overrightarrow{v}$

2. Parmi les couples de vecteusr suivant dîtes lesquels sont colinéaires entre eux et précisez le coefficient de proportionnalité de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$:

   a. $\overrightarrow{u}\,(3\,;2)$ et $\overrightarrow{v}\,(9\,;4)$

   b. $\overrightarrow{u}\,(2\,;3)$ et $\overrightarrow{v}\,(4{,}2\,;6{,}3)$

   c. $\overrightarrow{u}\,(-1\,;2)$ et $\overrightarrow{v}\,(4\,;-8)$

   d. $\overrightarrow{u}\,(0{,}7\,;4{,}1)$ et $\overrightarrow{v}\,(-2{,}8\,;16{,}4)$

3. Pour deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ colinéaires, que pouvez-vous dire du coefficient de colinéarité de $\overrightarrow{v}$ et de $\overrightarrow{u}$ relativement au coefficient de colinéarité de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$.

Exercice J.3

Soit A, B, C trois points du plan vérifiant la relation :

$$-\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB} + \frac{5}{2}\cdot\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{0}$$

Montrer que les points A, B, C sont alignés.

Exercice J.4

Soit $ABCD$ un parallélogramme. On note I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[DC]$.
Déterminer pour chaque calcul un représentant du vecteur résultant :

a. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IJ} - \overrightarrow{DJ}$

b. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{JA}$

c. $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AD}$

De nombreux autres exercices sur le site MaliMath

Ce livret est téléchargeable gratuitement

http://malimath.net

Date de parution : 09/2015