Exercice 1 : .... 5 points

$f(-3) = -1$; $f(-2) = -2$; $f(1) = -2$; 0 ; $f(9) = -\frac{1}{2}$

1. Réproduisons et complétons le tableau de variation :

x	-5		0		5		7		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

2. Donnons :

– le domaine de définition de f

$D_f = [-5 ; +\infty[\setminus \{0\} = [-5 ; 0[\cup]0 ; +\infty[.$

– les asymptotes à (C_f) :

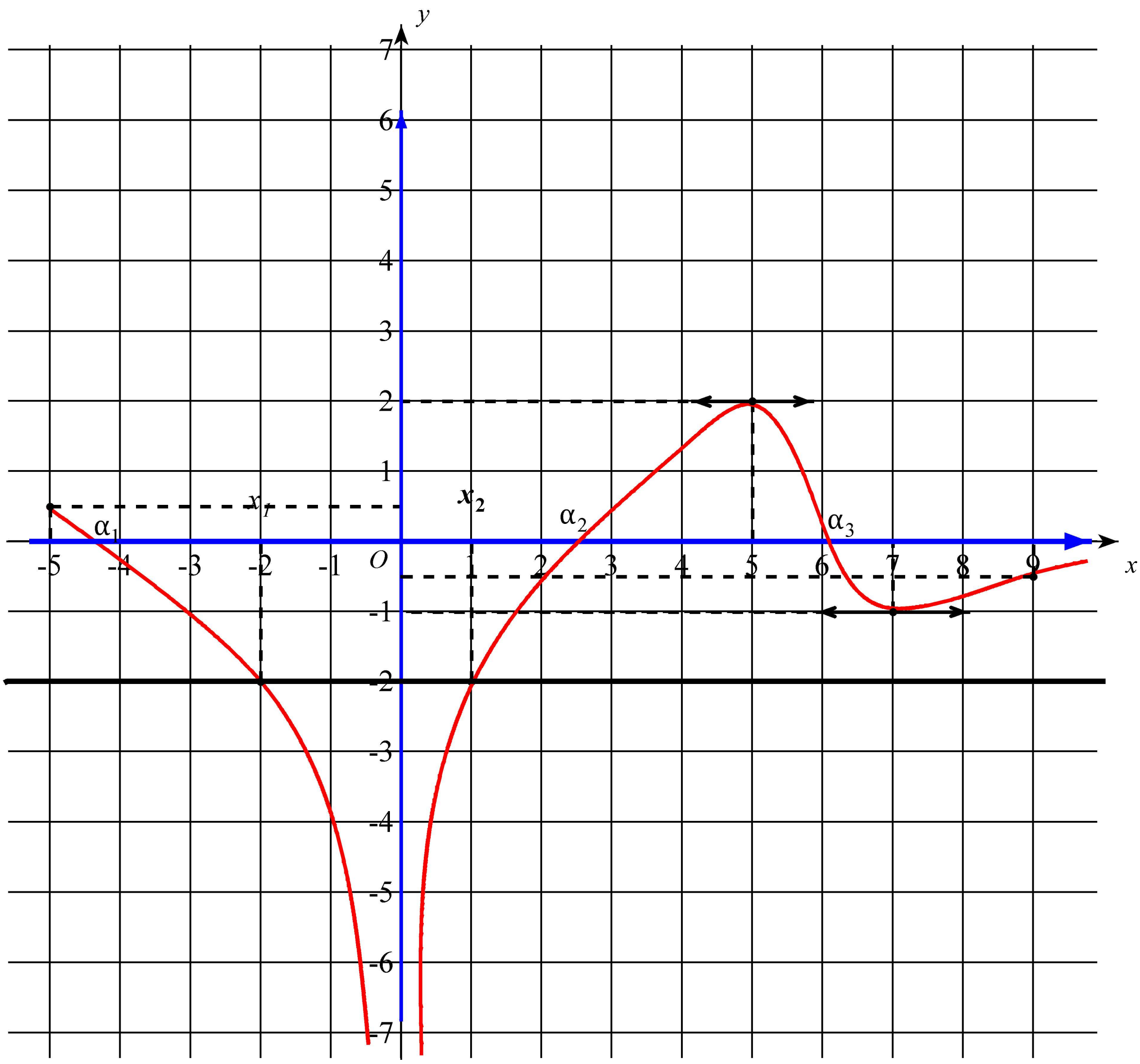
$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \Longrightarrow$ la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à (C_f)

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \Longrightarrow$ la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à (C_f) en $+\infty$

– le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$

L'équation $f(x) = 0$ admet 3 solutions (qui sont éléments de : $]-5 ; 0[$; $]0 ; 5[$; $]5 ; 7[$).

3. Construisons dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ les asymptotes à (C_f) et la courbe (C_f).



4. Résolvons graphiquement : l'équation $f(x) = -2$ et l'inéquation $f(x) \geq 0$

- l'équation $f(x) = -2 \Longrightarrow x_1 = -2$ et $x_2 = 1$
- l'inéquation $f(x) \geq 0 \Longrightarrow x \in [-5\ , \alpha_1] \cup [\alpha_2\ ; \alpha_3]$ (voir figure).

Exercice 2 : .... 5 points

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite géométrique de 1[er] terme $U_0 = 4$ et de raison $\frac{1}{2}$

$(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite arithmétique de 1[er] terme $V_0 = \frac{\pi}{4}$ et de raison $\frac{\pi}{2}$

Z_n le nombre complexe de module U_n et dont un argument est V_n.

1. a. Exprimons U_n et V_n en fonction de n.

$$U_n = U_0 \times q^n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

$$V_n = v_0 + nr = \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2n+1)\pi}{4}$$

b. Déduisons Z_n en fonction de n.

$$Z_n = U_n \times e^{i.V_n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \times e^{i\frac{(2n+1)\pi}{4}} \;;$$

$$Z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \times e^{i\frac{(2n+1)\pi}{4}}.$$

2. Démontrons que (Z_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}i$ et de pemier terme $Z_0 = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$

(Z_n) est une suite géométrique $\Leftrightarrow Z_{n+1} = q \times Z_n$

Méthode 1

$$Z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \times e^{i\left(\frac{2n+1}{4}\right)\pi} \Rightarrow Z_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times e^{i\left(\frac{2n+3}{4}\right)\pi}$$

$$\frac{Z_{n+1}}{Z_n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times e^{i\left(\frac{2n+3}{4}\right)\pi}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \times e^{i\left(\frac{2n+1}{4}\right)\pi}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-n+2} \times e^{i\left(\frac{2n+3}{4}\right)\pi - i\left(\frac{2n+1}{4}\right)\pi} = \left(\frac{1}{2}\right) \times e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$\frac{Z_{n+1}}{Z_n} = \frac{1}{2}i$ alors (Z_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}i$ et de 1^{er} terme :

$$Z_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \times e^{i\frac{\pi}{4}} = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4}\right) = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$$

Méthode 2

$$Z_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times e^{i\left(\frac{2n+3}{4}\right)\pi} = \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \times e^{i\left(\frac{2n+1}{4}\right)\pi} \times e^{i\left(\frac{1}{2}\right)\pi}$$

$$= \left[\left(\frac{1}{2}\right) \times e^{i\left(\frac{1}{2}\right)\pi}\right]\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \times e^{i\left(\frac{2n+1}{4}\right)\pi}$$

$Z_{n+1} = \frac{1}{2}i \times Z_n$ alors (Z_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}i$ et de 1^{er} terme :

$$Z_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \times e^{i\frac{\pi}{4}} = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4}\right) = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$$

3. Déterminons la nature de la transformation F qui au point $M_n\ (Z_n)$ associe le point $M_{n+1}\ (Z_{n+1})$

$Z_{n+1} = \frac{1}{2}iZ_n$ est de la forme $Z' = aZ + b$ avec $a = \frac{1}{2}i \in \mathbb{C}^*$ et $b = 0$; $k = |a| = \left|\frac{1}{2}i\right| = \frac{1}{2}$;

$\theta = Arg(a) = \frac{\pi}{2}$.

Donc F est la similitude directe de centre $O(0\ ;0)$, de rapport $k = \frac{1}{2}$ et d'angle $\theta = \frac{\pi}{2}$

Problème : .... **10 points**

Partie A :

Âge t_i (en nombre de semaines)	1	2	3	4	5	6	7	8
Taille y_i (*exprimée en centimètres*)	10	18	25	33	40	41	50	53

1. Déterminons une équation de la droite (D) passant par (G) et de coefficient directeur 6,14

$(D) : y = at + b \; ; a = 6{,}14 \Rightarrow y = 6{,}14t + b$

$$G\begin{pmatrix} t_G \\ y_G \end{pmatrix} : \begin{cases} t_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{8} t_i}{8} = \dfrac{1+2+3+4+5+6+7+8}{8} = 4{,}5 \\ y_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{8} y_i}{8} = \dfrac{10+18+25+33+40+41+50+53}{8} = 33{,}75 \end{cases}$$

$G(4{,}5\,;33{,}75) \in (D) : y_G = 6{,}14t_G + b \Rightarrow 33{,}75 = 6{,}14(4{,}5) + b \Rightarrow b = 6{,}12$

$(D) : y = 6{,}14t + 6{,}12$

2. Déterminons selon le modèle choisi la taille d'un poisson de 12 semaines

Pour $t = 12\,;\, y = 6{,}14(12) + 6{,}12 = 79{,}8$ cm

3. Calculons la taille atteint au bout de 3 ans.

$3\text{ans} = 3 \times 52 = 156$ semaines

$y = 6{,}14(156) + 6{,}12 = 963{,}96\text{cm}$

Autre méthode :

$1\ an = 365$ jours donc $3ans = 365 \times 3 = 1095$ jours

$\dfrac{1095}{7} = 156{,}42 \approx 156$ semaines

$y = 6{,}14(156) + 6{,}12 = 963{,}96$ cm

Partie B :

$g(t) = 87{,}5\left(1 - e^{-0{,}12t}\right)$

1. a. Déterminons la limite de la fonction en $+\infty$ puis en donnons une interprétation.

$$\lim_{t \to +\infty} g(t) = \lim_{t \to +\infty} 87{,}5\left(1 - e^{-0{,}12t}\right) = 87{,}5$$

La taille maximale d'un poisson 87,5 cm.

b. Déterminons la dérivée g' de la fonction g sur $[0\,;+\infty[$

$g(t) = 87{,}5\left(1 - e^{-0{,}12t}\right) \Rightarrow g'(t) = 87{,}5\left(0{,}12e^{-0{,}12t}\right) = 10{,}5e^{-0{,}12t}$

c. Etudions les variations de la fonction g sur $[0\,;+\infty[$

$\forall\, t \in [0\,;+\infty[,\ g'(t) \geq 0,\ g$ est croissante.

Tableau de variation :

$g(0) = 87{,}5\left(1 - e^{0}\right) = 0$

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(t)$	$+$
$g(t)$	$0 \nearrow 87{,}5$

2. **a.** Calculons avec ce modèle la taille d'un poisson de 3ans.

$t = 156$; $g(156) = 87{,}5\left(1 - e^{-0{,}12\times 156}\right) = 87{,}4999 \approx 87{,}5$ cm

b. L'âge théorique d'un poisson de 80 cm.

$$g(t) = 80 \Rightarrow 87{,}5\left(1 - e^{-0{,}12t}\right) = 80$$

$$\Rightarrow 1 - e^{-0{,}12t} = \frac{80}{87{,}5} \Rightarrow e^{-0{,}12t} = \frac{7{,}5}{87{,}5}$$

$$\Rightarrow -0{,}12t = \ln\left(\frac{7{,}5}{87{,}5}\right) \Rightarrow t = -\frac{\ln\left(\frac{7{,}5}{87{,}5}\right)}{0{,}12} \approx 20{,}47 \text{ soit } 21 \text{ semaines}$$

3. Traçons la courbe représentative de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;15[$ et la droite (D) de la partie A dans le même repère

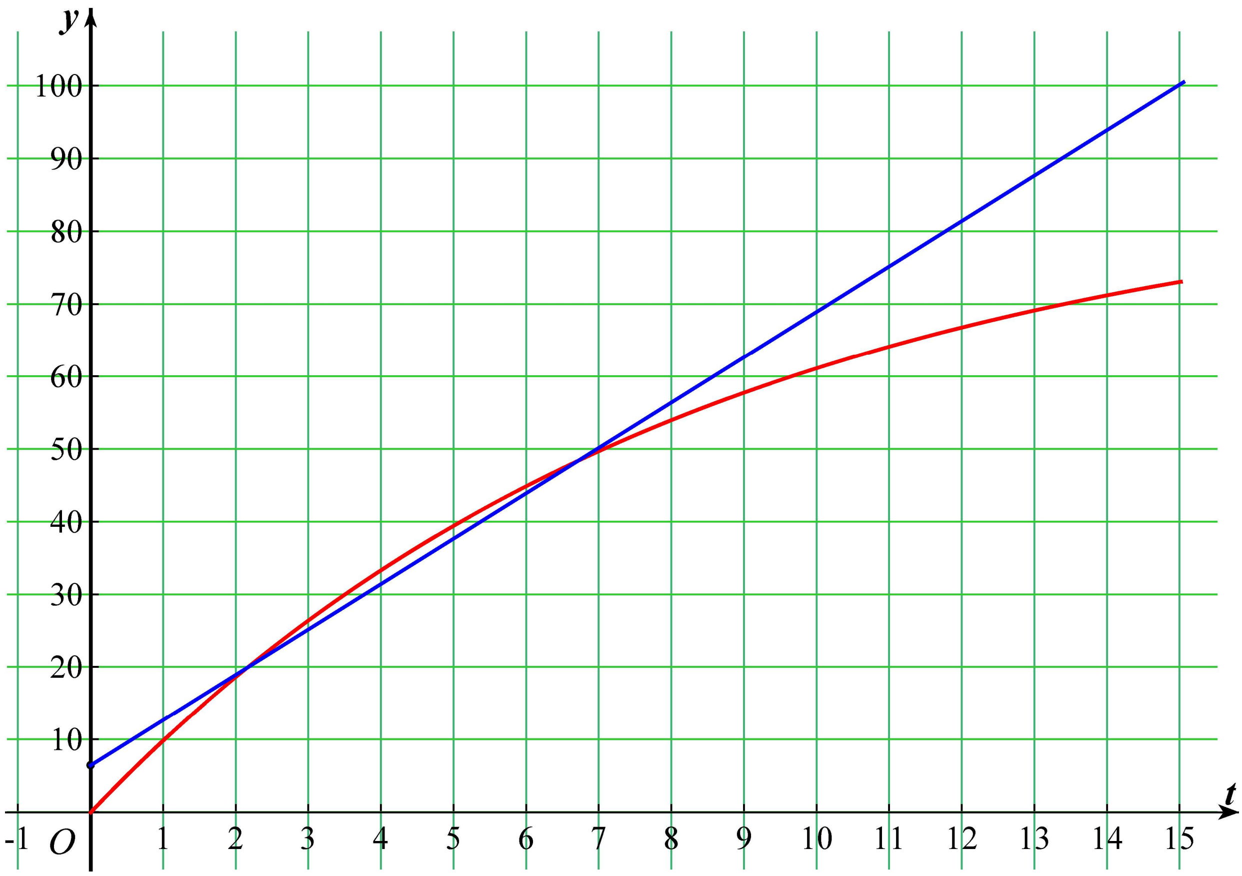
Unité : 1cm pour 1une semaine en abscisses, 1 cm pour 10cm en ordonnées

Tableau de valeur :

t	0	1	2	3	4	5	6	8	10	11	12	13	14	15
$g(t)$	0	9,9	18,7	26,5	33,4	39,5	44,9	54	61,1	64,1	66,8	69,1	71,2	73

(D) : $y = 6{,}14t + 6{,}12$

t	0	7
y	6,12	49,1



- Pour $t \in [\,0\;;\;2\,] \cap [\,7\;;\;15\,]$ la courbe de la partie *A* est au dessus de celle de la partie *B* donc la croissance en taille en fonction de l'âge des poissons obtenue dans la partie A est meilleure que celle obtenue dans la partie B du problème dans les 2 prémières semaines et aussi après la 7è semaine.
- Pour $t \in [\,2\;;\;7\,]$ la courbe de la partie A est en dessous de celle de la partie B donc entre la 2è et la 7è semaine le modèle de la partie B est la meilleure.