

LES NOMBRES COMPLEXES

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

I – Définition:

1°) **Définition 1** : Soit i le nombre imaginaire unité tel que $i^2 = -1$. On appelle ensemble des nombres complexes, l'ensemble noté $\mathbb{C}$ et défini par :

$$\mathbb{C} = \{ z = a + ib ; (a ; b) \in \mathbb{R}^2 \}.$$

- a est appelé la partie réelle de z notée $\text{Re}(z)$;
- b est appelé la partie imaginaire de z notée $\text{Im}(z)$.

2°) **Égalité de deux nombres complexes** :

Soient deux nombres complexes $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Re}(z) = \text{Re}(z') \\ \text{Im}(z) = \text{Im}(z') \end{cases}$$

3°) **Opérations dans $\mathbb{C}$** :

a) Addition :

Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$; on a $z + z' = (a + a') + i(b + b')$.

b) Multiplication:

$$z \times z' = (a + ib)(a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + ba').$$

c) Division:

$$\frac{a + ib}{a' + ib'} = \frac{(a + ib)(a' - ib')}{(a')^2 + (b')^2} \quad \text{avec } (a' ; b') \neq (0 ; 0)$$

$(\mathbb{C}, +)$ est un groupe abélien ; $(\mathbb{C}^*, \times)$ est un groupe commutatif.

La multiplication est distributive par rapport à l'addition dans $\mathbb{C}$, d'où $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps.

II – Conjugué d'un nombre complexe:

1°) **Définition 2**:

On appelle conjugué du nombre complexe $z = a + ib$ le complexe $\bar{z} = a - ib$.

Exemples: $z = 2 - 3i \Rightarrow \bar{z} = 2 + 3i$; $z = -1 + 5i \Rightarrow \bar{z} = -1 - 5i$.

2°) **Propriétés**: Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

<

III – Module d'un nombre complexe:

1°) Définition 3:

On appelle **module** du nombre complexe $z = a + ib$, le réel positif défini par

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (\text{lire module de } z)$$

Exemples : soit $z = 1 - i\sqrt{3} \Rightarrow |z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$;

$$z_0 = -7 \Rightarrow |z_0| = 7. \quad z_1 = 2i \Rightarrow |z_1| = 2.$$

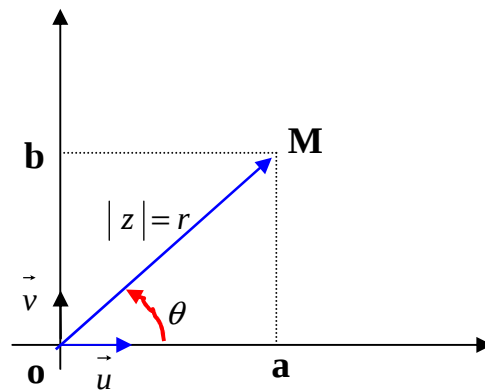
2°) Propriétés du module:

- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$; $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
- $|z| = |\bar{z}|$; $|z^n| = (|z|)^n$;
- $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$ avec $z' \neq 0$;
- $(|z| = 0) \Leftrightarrow z = 0$; $(|z| = 1) \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$
- Si $z = a$ alors $|z| = |a|$; si $z = bi$ alors $|z| = |b|$.

IV– Argument d'un nombre complexe non nul:

Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. A tout nombre complexe

$$z = a + ib \text{ on associe le point } M \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \quad z = a + ib \mapsto M \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$



- Le nombre complexe $z = a + ib$ est appelé **l'affixe** du point M (a ; b) ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$ (a ; b).
- Le point M et le vecteur $\overrightarrow{OM}$ sont appelés respectivement le **point image** et le **vecteur image** du nombre complexe z.
- $OM = d(O; M) = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$ (module de z).
- Si A et B sont deux points du plan d'affixes respectives z_A et z_B alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $(z_B - z_A)$ et $|z_B - z_A| = AB$.

1°) Argument d'un nombre complexe non nul :

On appelle **argument de z** noté $\arg(z)$, le réel égal à une mesure de l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$. L'argument de z est définie à $2k\pi$ près ; $k \in \mathbb{Z}$. $\arg(z) = \theta + 2k\pi$ où θ est la détermination principale de l'argument. On écrit : $\text{Arg}(z) = \theta$ avec $\theta \in]-\pi ; \pi]$.

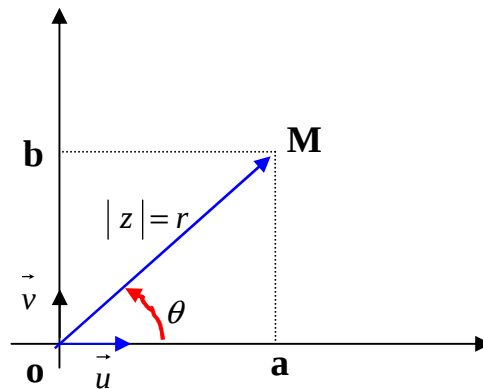
Si $z \neq 0$ alors toute mesure θ de l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$ est appelée un argument de z ; (Voir figure).

2°) Forme algébrique – Forme trigonométrique d'un complexe non nul :

a) Forme algébrique :

$z = a + ib$ est la forme algébrique du nombre complexe z.

b) Forme trigonométrique : Soit $z = a + ib$



$$\text{on a : } \cos \theta = \frac{a}{OM} \quad \sin \theta = \frac{b}{OM} \Leftrightarrow a = OM \cos \theta \quad \text{et} \quad b = OM \sin \theta$$

$$z = a + ib \Leftrightarrow z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) \quad \text{ou} \quad z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

L'écriture : $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ est appelée forme trigonométrique de z .

c) Relation entre Forme Trigonométrique et Forme algébrique :

Soit $z = a + ib$ de module $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ et d'Argument θ .

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{|z|} \\ \sin \theta = \frac{b}{|z|} \end{cases} \Rightarrow \theta = \dots (\text{confère cercle trigonométrique})$$

3°) Propriétés de l'argument d'un nombre complexe non nul :

P₁) Soit $z = a$ ($a \in \mathbb{R}$), si $a > 0$ alors $\text{Arg}(z) = 0$; si $a < 0$ alors $\text{Arg}(z) = \pi$.

P₂) Le nombre complexe nul n'a pas d'argument ;

P₃) Soit $z = bi$ ($b \in \mathbb{R}$), si $b > 0$ alors $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{2}$; si $a < 0$ alors $\text{Arg}(z) = -\frac{\pi}{2}$.

P₄) Soient $z = [|z| ; \theta]$ et $z' = [|z'| ; \theta']$.

$$\cdot \text{Arg}(z \times z') = \text{Arg}(z) + \text{Arg}(z') = \theta + \theta' .$$

Remarque : Si $z = [|z| ; \theta]$ alors $z^2 = [|z|^2 ; 2\theta]$; $z^n = [|z|^n ; n\theta]$.

P₅)
$$\cdot \text{Arg}\left(\frac{z}{z'}\right) = \text{Arg}(z) - \text{Arg}(z')$$

$$\text{Si } z = [|z| ; \theta] \text{ et } z' = [|z'| ; \theta'] \text{ alors } \frac{z}{z'} = \left[\frac{|z|}{|z'|} ; \theta - \theta' \right] .$$

P₆)
$$\cdot \text{Arg}(z^n) = n \times \text{Arg}(z)$$

P₇)
$$\cdot \text{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) = -\text{Arg}(z)$$

4°) Notation Exponentielle :

Soit $z = [1 ; \theta]$ on convient de noter $z = \cos\theta + i \sin\theta = e^{i\theta}$.
Cette écriture est appelée la **forme exponentielle de z**.

Donc $z = r(\cos\theta + i \sin\theta) = re^{i\theta}$.

5°) Formule de Moivre – Formule d'Euler :

a) **Formule de Moivre :**

$$\cdot \forall n \in \mathbb{N}^*, (\cos\theta + i \sin\theta)^n = (\cos n\theta + i \sin n\theta) .$$

b) **Formule d'Euler :**

$$Z = \cos\theta + i \sin\theta = e^{i\theta}$$

$$\bar{z} = \cos\theta - i \sin\theta = e^{-i\theta}$$

<

V- Linéarisation:

1°) Calcul de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$:

▪ Pour $n = 2$ d'après la formule de Moivre $(\cos x + i \sin x)^2 = \cos 2x + i \sin 2x$
D'après la formule du binôme de Newton

$$(\cos x + i \sin x)^2 = (\cos^2 x - \sin^2 x) + i(2 \sin x \cos x).$$

Par identification on a : $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ et $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$.

- Même procédé pour $n = 3 ; 4 ; 5 ; \dots$

2°) Linéarisation :

$$\begin{aligned} z &= \cos x + i \sin x \\ \bar{z} &= \cos x - i \sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= \cos x + i \sin x \\ \bar{z} &= \cos x - i \sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z + \bar{z} &= 2 \cos x \\ \cos x &= \left(\frac{1}{2}\right)(z + \bar{z}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z - \bar{z} &= 2i \sin x \\ \sin x &= \left(\frac{1}{2i}\right)(z - \bar{z}) \end{aligned}$$

$$\cos^n x = \left(\frac{1}{2}\right)^n (z + \bar{z})^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (e^{ix} + e^{-ix})^n.$$

$$\sin^n x = \left(\frac{1}{2i}\right)^n (z - \bar{z})^n = \left(\frac{1}{2i}\right)^n (e^{ix} - e^{-ix})^n.$$

De $z^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$ et $\bar{z}^n = \cos(nx) - i \sin(nx)$ on déduit que

$$z^n + \bar{z}^n = e^{nx} + e^{-nx} = 2 \cos(nx) \quad . \quad z^n - \bar{z}^n = e^{nx} - e^{-nx} = 2i \sin(nx) \quad .$$

Remarque:

$$z \times \bar{z} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \text{et} \quad z^n \times \bar{z}^n = 1.$$

Exemple: Linéariser $\cos^3 x$ et $\sin^4 x$.

VI- Racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe:

Soit n un entier naturel strictement supérieur à 1.

▪ **Définition :** U étant un nombre complexe non nul, on appelle racine $n^{\text{ième}}$ de U tout nombre complexe z tel que $z^n = U$.

▪ Posons $u = [r ; \theta] = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z = [\rho ; x] = \rho(\cos x + i\sin x)$.

$$z^n = u \Leftrightarrow [\rho^n ; nx] = [r ; \theta] \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^n = r \\ nx = \theta + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ x = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \end{cases} \text{ d'où}$$

$$Z_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right] \text{ avec } 0 \leq k \leq n-1$$

$$\text{ou } Z_k = \sqrt[n]{r} \times e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)}$$

Exemple :

Déterminer toutes les racines cubiques de l'unité c'est à dire résoudre $z^3 = 1$. Placer les points images A ; B ; C des solutions dans le plan complexe et en déduire la nature du triangle ABC .

Correction

$$Z^3 = 1 \Leftrightarrow u = 1 \Leftrightarrow u = [1 ; 0].$$

$$Z_k = \sqrt[3]{1} \left(\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right) \right) \text{ avec } 0 \leq k \leq 2$$

- Si $k = 0$ alors $z_0 = 1 \mapsto A(1 ; 0)$
- Si $k = 1$ alors $z_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \mapsto B\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- Si $k = 2$ alors $z_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \mapsto C\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- $AB=AC=BC$ d'où le triangle ABC est équilatéral.

▪ Théorème 1 :

Tout nombre complexe non nul U admet exactement n racines $n^{\text{ième}}$.

Si Z_k est une racine $n^{\text{ième}}$ de U alors $|Z_k| = \sqrt[n]{|U|}$ et $\arg(z_k) = \frac{\arg(U) + 2k\pi}{n}$.

▪ **Théorème 2 :**

Si z_0 est une racine $n^{\text{ième}}$ de U alors on obtient toutes les autres racines de U en multipliant z_0 successivement par les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité ou 1.

Exemple : Déterminer les solutions dans de l'équation $z^4 = (2 + 3i)^4$.

Correction

$z_0 = 2 + 3i$ est une solution particulière de l'équation. Comme les racines quatrième de 1 sont : 1 ; i ; -1 ; $-i$. Alors les solutions de l'équation

$z^4 = (2 + 3i)^4$ sont: $Z_1 = z_0 \times 1 = 2 + 3i$; $Z_2 = z_0 \times i = -3 + 2i$;

$Z_3 = z_0 \times -1 = -2 - 3i$; $Z_4 = z_0 \times -i = 3 - 2i$.

L'ensemble des solutions est $S = \{Z_1; Z_2; Z_3; Z_4\}$.

VII- Équations du second degré:

1° Cas où les coefficients sont des réels

:

Soit l'équation : $az^2 + bz + c = 0$ ($a \neq 0$)

Méthode de résolution

- Calculer le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.
- Conclure suivant le signe de Δ .

a-/ si $\Delta > 0$ alors l'équation admet deux racines

$$Z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad Z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

b-/ si $\Delta = 0$ alors $Z_1 = Z_2 = \frac{-b}{2a}$.

c-/ si $\Delta < 0$ alors l'équation admet deux racines

$$Z_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad \text{et} \quad Z_2 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$

Exemple : résoudre dans $\mathbb{C}$; $z^2 - 2z + 4 = 0$. la résolution donne comme ensemble

Tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées opposées.

Soient $z = x + iy$ et $U = a + ib$

$$(z^2 = U) \text{ équivaut à } \begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

Exemple :

Déterminer les racines carrées du nombre complexe $z = -5 - 12i$.

Correction

Soit $\delta = x + iy$ le nombre complexe tel que : $\delta^2 = z$ et $|\delta|^2 = |z|$.
on a module de z est $|z| = \sqrt{25 + 144} = 13$.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 & (1) \\ x^2 - y^2 = -5 & (2) \\ 2xy = -12 & (3) \end{cases}$$

$(1) + (2) \Rightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = -2$.

- Pour $x = 2$, $(3) \Rightarrow y = -3$; donc $\delta_1 = 2 - 3i$.
- Pour $x = -2$, $(3) \Rightarrow y = 3$; donc $\delta_2 = -2 + 3i$.
- δ_1 et δ_2 sont les racines carrées de $z = -5 - 12i$.

3°) Cas où les coefficients sont des nombres complexes :

Si le discriminant Δ est un nombre complexe de racines carrées δ_1 et δ_2
alors les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ ($a \neq 0$) sont :

$$Z_1 = \frac{-b + \delta_1}{2a} \text{ et } Z_2 = \frac{-b + \delta_2}{2a}.$$

Exemple ; résoudre dans : $(2i)z^2 - 3z - (1 + 3i) = 0$.

$\Delta = -15 + 8i$. Cherchons les racines carrées de Δ .

soit $\delta = x + iy$ tel que : $\delta^2 = \Delta$ et $|\delta|^2 = |\Delta|$. On a $|\Delta| = 17$;

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 & (1) \\ x^2 - y^2 = -15 & (2) \\ 2xy = 8 & (3) \end{cases} \quad (1) + (2) \Rightarrow x^2 = 1 \quad x = 1 \text{ ou } x = -1.$$

- Si $x = 1$ alors (3) donne $y = 4$; donc $\delta_1 = 1 + 4i$.
- Si $x = -1$ alors (3) donne $y = -4$; donc $\delta_2 = -1 - 4i$.

$$z_1 = \frac{3+1+4i}{4i} = \frac{4+4i}{4i} = \frac{1+i}{i} = \frac{-1+i}{-1} = 1-i \quad ; \quad z_1 = 1-i$$

$$z_2 = \frac{3-1-4i}{4i} = \frac{2-4i}{4i} = -1 - \frac{1}{2}i \quad ; \quad z_2 = -1 - \frac{1}{2}i.$$

L'ensemble des solutions de l'équation est : $S = \left\{ 1-i ; -1-\frac{1}{2}i \right\}$.

VIII – Applications géométriques:

1) Interprétation géométrique du langage complexe :

Soient $z_A ; z_B ; z$ trois nombres complexes distincts d'images respectives $A ; B ;$ et M dans le plan complexe P .

$$Z = \frac{z - z_B}{z - z_A} \Leftrightarrow \begin{cases} |Z| = \frac{MB}{MA} \\ \text{Arg}(Z) = \left(\overbrace{MA}^{\quad} ; \overbrace{MB}^{\quad} \right) \end{cases}$$

D'autre part $\arg(z_B - z_A) = (\vec{i}, \overrightarrow{AB}) + 2k\pi$. $-\arg(z_B - z_A) = (\overrightarrow{AB}; \vec{i}) + 2k\pi$.

En particulier :

$$\begin{matrix} z_A \mapsto A \\ z_B \mapsto B \\ z_C \mapsto C \end{matrix} \quad \text{alors} \quad \begin{cases} \frac{|z_C - z_A|}{|z_B - z_A|} = \frac{AC}{AB} \\ \left(\overbrace{AB}^{\quad} ; \overbrace{AC}^{\quad} \right) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) \end{cases}$$

2) Traductions complexes de certaines configurations usuelles :

a) Vecteurs orthogonaux – Vecteurs colinéaires :

Soit les complexes $z_A ; z_B$ et

c) Exemple :

Soit les complexes $-1 - i$; $1 + i$; $-1 + i$ d'images respectives les points A ; B ; C. Déterminer le module et l'argument de $Z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$. En déduire la nature du triangle ABC.

Correction

$$z_A = -1 - i \mapsto A(-1 ; -1) ; \quad z_B = 1 + i \mapsto B(1 ; 1) ; \quad z_C = -1 + i \mapsto C(-1 ; 1).$$

$$AC = 2 ; AB = 2\sqrt{2} ; |Z| = \frac{|z_C - z_A|}{|z_B - z_A|} = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2} ;$$

$$\text{Arg}(Z) = \text{Arg}\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \text{Arg}\left(\frac{2i}{2+2i}\right) = \text{Arg}\left(\frac{i}{1+i}\right) = \text{Arg}\left(\frac{1+i}{2}\right) = \text{Arg}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \theta$$

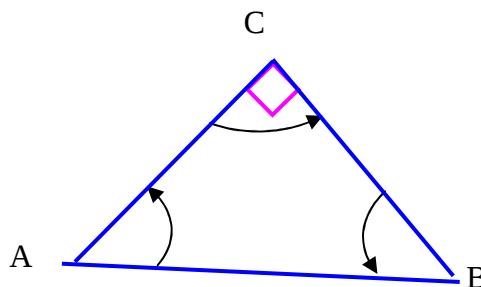
$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ d'où } \text{Arg}(Z) = \frac{\pi}{4}. \quad Z = \left[\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\pi}{4} \right].$$

- Nature du triangle ABC

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow \left(\overbrace{AB, AC} \right) = \frac{\pi}{4} [2\pi]. \text{ De façon analogue on a:}$$

$$\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \arg\left(\frac{2}{-2i}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \Leftrightarrow \left(\overbrace{CA, CB} \right) = \frac{\pi}{2} [2\pi].$$

$$\arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right) = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left(\overbrace{BC, BA} \right) = \frac{\pi}{4} [2\pi]. \text{ D'où ABC est un triangle rectangle et isocèle.}$$

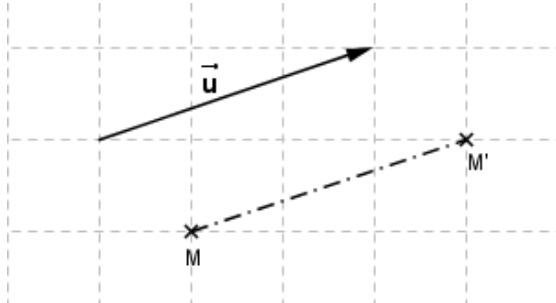


IX – Nombres complexes et transformations:

1 – Translations

Soient M et M' deux points d'affixes respectifs z et z' . Le vecteur $\vec{u}$ d'affixe z_0 .

Déterminons l'écriture complexe de la translation t de vecteur $\vec{u}$ qui transforme M en M'.



$$t_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow z' - z = z_0 \Leftrightarrow z' = z + z_0$$

$z' = z + z_0$, est l'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{u}$.

Exemple : Soit t la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $z_0 = 2 + i$.

Déterminer l'écriture complexe de la transformation t .

Soit M' le point d'affixe z' , image de M d'affixe z par la transformation t .

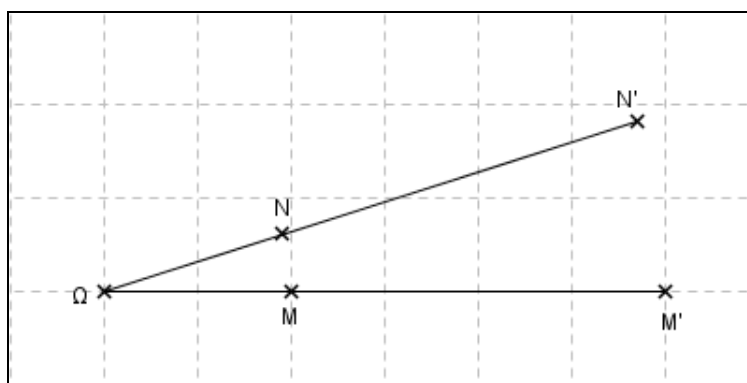
$$t_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow z' - z = z_0 \Leftrightarrow z' - z = 2 + i \Leftrightarrow z' = z + (2 + i).$$

L'écriture complexe de la translation t est : $z' = z + 2 + i$.

2– L'Homothétie :

Soient M et M' deux points d'affixes respectifs z et z' . Soit Ω un point du plan

d'affixe Z_0 . Déterminons l'écriture complexe de l'homothétie h de centre Ω et de rapport k qui transforme M en M'.



Exemple 2 :

Soit h l'homothétie de centre Ω d'affixe $z_\Omega = 2 + i$ et de rapport -2 . Déterminer l'écriture complexe de la transformation h .

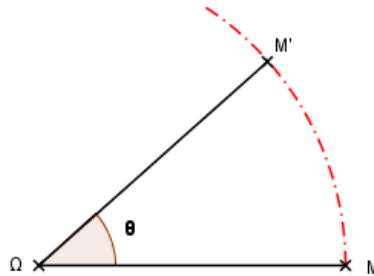
- Soit M' le point d'affixe z' , image de M d'affixe z par l'homothétie h .

$$h_\Omega(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = -2\overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow z' - z_\Omega = -2(z - z_\Omega)$$
$$z' - (2 + i) = -2z + 2(2 + i) \Leftrightarrow z' - 2 - i = -2z + 4 + 2i \Leftrightarrow z' = -2z + 6 + 3i.$$

L'écriture complexe de l'homothétie h est : $z' = -2z + 6 + 3i$.

3 – La Rotation :

Soient M et M' deux points d'affixes respectifs z et z' . Soit Ω un point du plan d'affixe Z_Ω . Déterminons l'écriture complexe de la rotation r de centre Ω et d'angle θ qui transforme M en M' .



$$r_{(\Omega; \theta)}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{\Omega M}) = \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |Z' - Z_\Omega| = |Z - Z_\Omega| \\ \text{Arg} \left(\frac{Z' - Z_\Omega}{Z - Z_\Omega} \right) = \theta \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{|Z' - Z_\Omega|}{|Z - Z_\Omega|} = 1 \\ \text{Arg} \left(\frac{Z' - Z_\Omega}{Z - Z_\Omega} \right) = \theta \end{cases} \Leftrightarrow \frac{Z' - Z_\Omega}{Z - Z_\Omega} = [1; \theta] \Leftrightarrow \frac{Z' - Z_\Omega}{Z - Z_\Omega} = (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$Z' - Z_\Omega = (\cos \theta + i \sin \theta)(Z - Z_\Omega) \Leftrightarrow Z' - Z_\Omega = e^{i\theta} (Z - Z_\Omega)$$

$$\boxed{Z' - Z_\Omega = (\cos \theta + i \sin \theta) (Z - Z_\Omega)} \quad \text{ou} \quad \boxed{Z' - Z_\Omega = e^{i$$

Exemple :

Soit la rotation r de centre A d'affixe $Z_A = 3i$ et d'angle $\theta = \frac{\pi}{2}$. Déterminer l'écriture complexe de la transformation r .

- Soit M' le point d'affixe z' , image de M d'affixe z par la rotation r .

$$r_A(M) = M' \Leftrightarrow AM' = AM \text{ et } (\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AM'}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow z' - z_A = b(z - z_A) \text{ avec } b = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{i\frac{\pi}{2}} = i.$$

$$\text{Donc } z' - z_A = b(z - z_A) \Leftrightarrow$$

$$z' - 3i = i(z - 3i) \Leftrightarrow$$

$$z' - 3i = iz + 3 \Leftrightarrow$$

$$z' = iz + 3i + 3 \Leftrightarrow$$

$$z' = i(z + 3) + 3.$$

L'écriture complexe de la rotation r est : $z' = i(z + 3) + 3$.

4- Recherche des lieux géométriques :

Soient A ; B ; $I(x_0 ; y_0)$ et $M(x ; y)$ des points du plan.

Si les points $M(x ; y)$ du plan vérifient :	Alors l'ensemble ($\mathcal{E}$) des points M cherchés est :
$ax + by + c = 0$	La droite ($\mathcal{D}$) d'équation : $ax + by + c = 0$
$y = \frac{ax+b}{cx+d}$ avec $c \neq 0$	L'hyperbole ($\mathcal{H}$) d'équation: $y = \frac{ax+b}{cx+d}$
$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$	Le cercle ($\mathcal{C}$) de centre $I(x_0 ; y_0)$ et de rayon r .
$MA = MB$	La droite (Δ) médiatrice du segment $[AB]$
$\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} = 0$	Le cercle ($\mathcal{C}$) de diamètre le segment $[AB]$
$y = ax^2 + bx + c$	La parabole ($\mathcal{P}$) d'équation : $y = ax^2 + bx + c$