Fonctions Numériques

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

A- / Ensemble de définition d'une fonction :

1- / Définition :

Soit f : A → B une fonction. On appelle ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f, l'ensemble des éléments x de A qui ont une image dans B par f.

2- / Exemples :

Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de chacune des fonctions définies par.

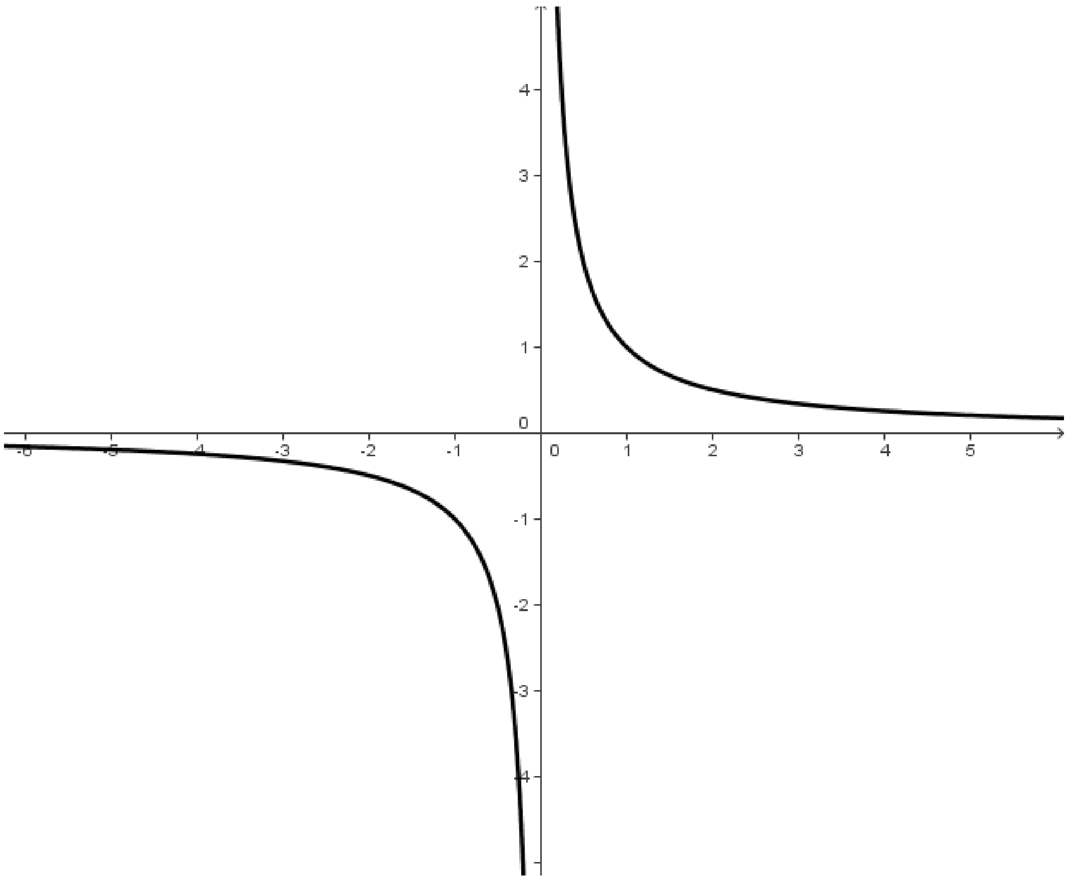
a) $f(x) = 3x^2 + 4x - 9$; b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - 7x + 6}$; c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-4}}{x-5}$;

d) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 3x - 2}$.

B- / Limites :

I- / Approche graphique :

La fonction f est donnée par sa courbe représentative ci-dessous.



1-/ Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

2-/ Trouver $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

II-/ Calcul de limites :

1-/ Limites obtenues directement ou par transformation de l'expression :

a/ Fonctions Polynômes :

- **Théorème 1 :** À l'infini toute fonction polynôme a même limite que son monôme de plus haut degré.
- **Exemples :** Calculer les limites suivantes

$\lim\limits_{x\to-\infty} -x^3+2x^2-5x+9$; $\lim\limits_{x\to+\infty} -5x^3-3x^2+x+4$; $\lim\limits_{x\to-\infty} 7x^4-5x^3+4x^2-8x+1$

b/ Fonctions Rationnelles :

- **Théorème 2 :** À l'infini toute expression se présentant sous la forme d'une fraction a même limite que le rapport des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.
- **Exemples :** Calculer les limites suivantes

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^3-5x^2+6x-7}{4x^2-5x+2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-5x^2+7x-8}{x^2+9x-7}$; $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^3-8}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^3+x^2+2x-4}{x^3+2x^2-5x+2}$

c/ Fonctions Irrationnelles :

Déterminer les ensembles de définition de chacune des fonctions puis calculer les limites suivantes.

* $f(x)=\dfrac{3-\sqrt{x+8}}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{3-\sqrt{x+8}}{x-1}$; ******

$f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x+1-\sqrt{x^2+3x+2}\right)$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x+1-\sqrt{x^2+3x+2}\right)$

d-/ Fonctions Trigonométriques :

Retenons que pour x très voisin de zéro on a : sinx = x d'où

$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x}{x}=1$; *pour* $a\neq0$ $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin ax}{ax}=1$; $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\tan x}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\cos x}{x}=0$

Exercices : Calculer les limites suivantes

$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\right)$; *pour* $\alpha\neq0$ *et* $\beta\neq0$ $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin\alpha x}{\beta x}$; $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{1-\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\sin x}$

2-/ Limites obtenues par changement de variables :

Exemple : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin x-1}{2\cos x-\sqrt{3}}$; *en posant* $x-\dfrac{\pi}{6}=u$ *on obtient* $Rép=-\sqrt{3}$

3-/ Limites obtenues par encadrement :

a) Si f(x) $\leq$ g(x) et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

b) Si f(x) $\leq$ g(x) et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

c) Exemple :

Soit $f : x \mapsto f(x) = x + 3\cos x$.

Pour tout réel x on a : $x - 3 \leq f(x) \leq x + 3$.

- $x - 3 \leq f(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} (x-3) \leq \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$;
- $f(x) \leq x + 3$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \leq \lim\limits_{x \to +\infty} (x+3) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

4-/ Théorème des gendarmes :

Soient *f ; g et h* trois fonctions telles que :

$\forall x \in]a;b[$ si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = l$ *Alors* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l$.

Exemple : Calculer

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\sin 3x}{x^2+1} \right) \Leftrightarrow -1 \leq \sin 3x \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2+1} \leq \frac{\sin 3x}{x^2+1} \leq \frac{1}{x^2+1} \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\sin 3x}{x^2+1} \right) = 0$$

5-/ Utilisation de la dérivée dans le calcul des limites :

a) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$.

b) Exemples

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = 2 \ ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0 \ ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = (\sin)'(0) = \cos(0) = 1$$

C- / Continuité d'une fonction f :

1– Continuité en un point d'abscisse x_0 :

a) Définition : Soit f une fonction numérique de la variable réelle x d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$. On dit que f est continue au point d'abscisse x_0 de $\mathcal{D}_f$ si et seulement si $f(x_0)$ est définie et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

$$\left(\begin{array}{c} f \ \ est \ \ continue \ \ au \ \ point \\ x_0 \ \ de \ \ D_f \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \bullet \ f(x_0) \ \ définie \\ \bullet \ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \end{array} \right)$$

b) Exemple :

– Soit $f(x) = \dfrac{x-2}{2x}$. La fonction f est-elle continue en $x_0=1$? ; en $x_0=0$?

– Soit f définie par $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}}$.

- Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
- f est-elle continue en $x_0 = 2$?.

2– Prolongement par continuité en un point :

a) Définition :

$$\left(\begin{array}{l} f \ \ est \ \ prolongeable \ \ par \\ continuité \ \ au \ \ point \ \ x_0 \end{array} \right) \ si \ et \ seulement, si \ \left(\begin{array}{l} \bullet \ x_0 \notin Df \\ \bullet \ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \ , \ l \in IR \end{array} \right)$$

Son prolongement est la fonction g définie par $\begin{cases} g(x) = f(x) & si \quad x \neq x_0 \\ g(x_0) = l & \end{cases}$

b) Exemple et contre exemple :

– Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x-1}$; f est-elle prolongeable par continuité en $x_0=1$? si oui déterminer son prolongement g.

– Soit f définie par $f(x)=\dfrac{3}{x^2}$; f peut-elle être prolongée par continuité en 0 ?.

3– Continuité d'une fonction sur un intervalle I = [a ;b] :

Une fonction f est continue sur I = [a ; b] , si elle est continue en tout point de I = [a ; b].

4– Théorème 3:

Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
Toute fonction rationnelle est continue en tout point de son ensemble de définition.

5– Théorème 4 :

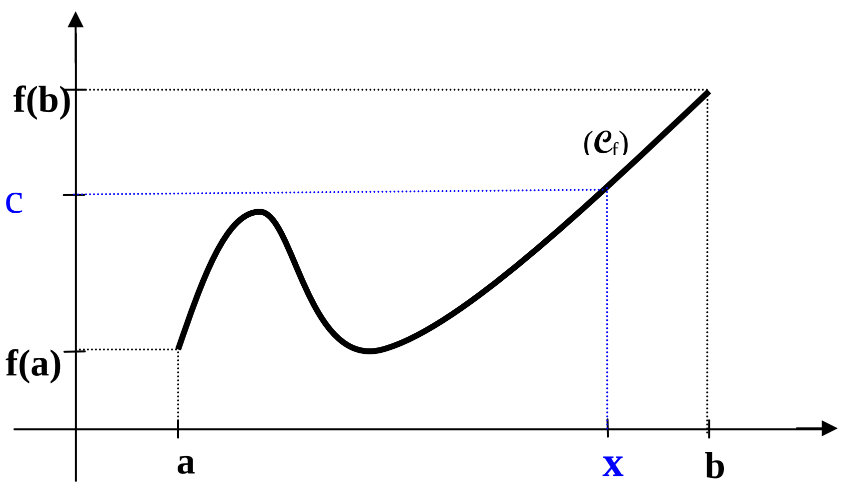
Si f et g sont deux fonctions respectivement continue en x_0 ; alors les fonctions $(f+g)$; $(f-g)$; $(f\times g)$; (λf) $(\lambda \in IR)$; $\left(\dfrac{f}{g}\right)$ $si \quad g(x)\neq 0$

sont continues en x_0.

6– Théorème des valeurs intermédiaires :

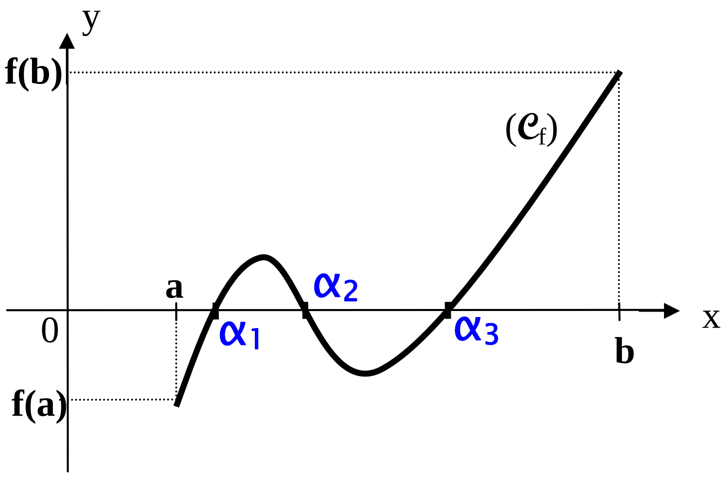
a) Énoncé du théorème 5 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé [a ; b] et **c** un nombre situé entre $f(a)$ et $f(b)$ inclusivement ; alors il existe au moins une valeur x dans l'intervalle [a ; b] tel que $f(x)=c$.



b) Conséquence du Théorème 5 :

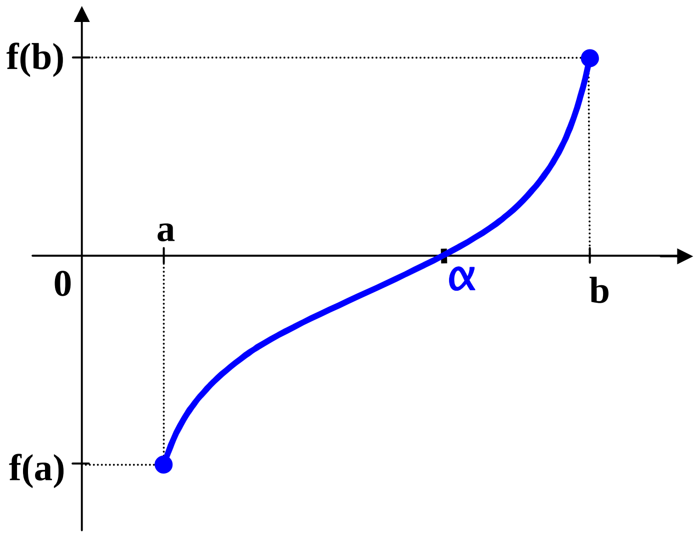
Si f est une fonction continue sur [a ; b] et si $f(a)$ *et* $f(b)$ sont de signes contraires c'est-à-dire $f(a)\times f(b)<0$ alors l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution α dans [a ; b] tel que $f(\alpha)=0$.



b) Théorème de la bijection :

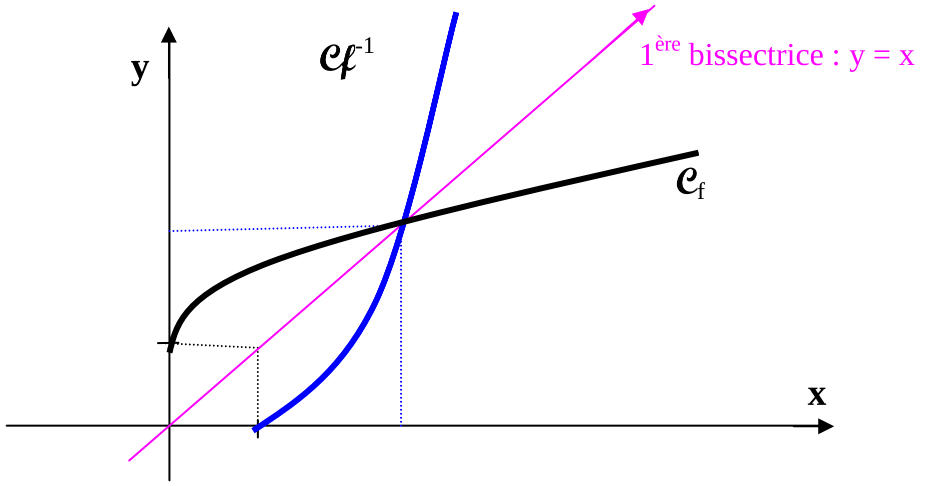
Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I = [a ; b] alors f réalise une bijection de I = [a ; b] sur f (I) où f (I) est un intervalle.

De plus si $f(a)$ *et* $f(b)$ sont de signes contraires c'est-à-dire $f(a)\times f(b)<0$ alors l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans [a ; b] tel que $f(\alpha)=0$.



7- Représentation graphique d'une bijection réciproque :

Pour représenter la courbe ($\mathcal{C}_f^{-1}$) de la bijection réciproque de la bijection f ; on trace le symétrique orthogonal de la courbe ($\mathcal{C}_f$) de f par rapport à la première bissectrice d'équation y = x.



8- Rappels :

Soit f la fonction définie sur un intervalle I = [a ; b]. Soient x_1 et x_2 deux éléments de I.

- Si $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ alors f est croissante sur **I**.
- Si $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ alors f est décroissante sur **I**.
- $\forall x_1 \in$ **I**, $\forall x_2 \in$ **I**, si $f(x_1) = f(x_2)$ alors f est constante sur **I**.

D- / Dérivée d'une fonction numérique :

1- Fonction dérivable en un point :

a) Définition : On dit qu'une fonction f est dérivable au point d'abscisse x_0 (ou admet un nombre dérivé au point x_0) de son ensemble de définition si et seulement, si : $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A$; $(A \in IR)$. A est noté $f'(x_0)$ et est appelé le nombre dérivé de la fonction f au point x_0.

b) Exemples :

Etudier la dérivabilité de f en x_0 dans les cas suivants

- $f(x) = x^2 + 2x - 1$ *et* $x_0 = 2$ **;**
- $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ *et* $x_0 = -1$

2- Équation de la tangente à la courbe en un point x_0 :

L'équation de la tangente (T) à la courbe ($\mathcal{C}_f$) de f au point d'abscisse x_0 est

. (T) : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

3- Remarque : Si le coefficient directeur $f'(x_0) = 0$, la tangente est horizontale ou parallèle à l'axe des abscisses en x_0.

4- Techniques de dérivation :

a) Formules de dérivation :

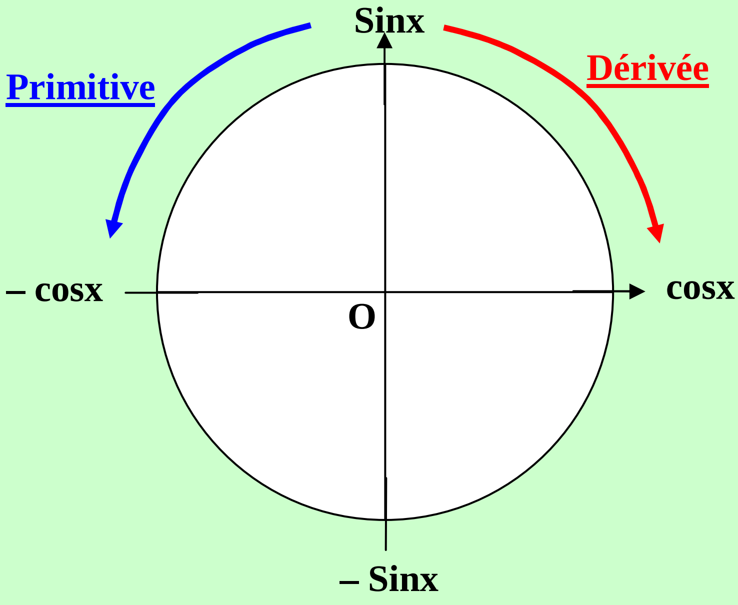
Soient $f\,;u \text{ et } v$ des fonctions dérivables en un point x de l'intervalle I.

Fonction f définie par	Fonction dérivée f' définie par
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = ax$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = ax^n$	$f'(x) = anx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$u = f^n$	$u' = \left(f^n\right)' = n \times f^{n-1} \times f'$
$f = u + v$	$f' = (u+v)' = u' + v'$
$f = u \times v$	$f' = (u \times v)' = u'v + v'u$
$f = \frac{u}{v}$	$f' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
$f(x) = \sqrt{u(x)}$	$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$f(x) = u(ax+b)$	$f'(x) = a \times u'(ax+b)$

b) Dérivées de fonctions circulaires :

$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \sin(ax+b)$	$f'(x) = a\cos(ax+b)$
$f(x) = \cos(ax+b)$	$f'(x) = -a\sin(ax+b)$
$f(x) = tgx$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$
$f(x) = \cot gx$	$f'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot g^2 x)$

N.B : Cette nouvelle technique que je mets à votre disposition vous permettra de retenir le plus simplement possible la dérivée et la primitive des fonctions Sinus et Cosinus



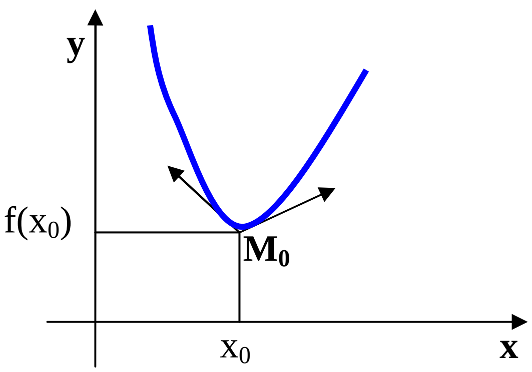
c) Dérivée de la bijection réciproque :

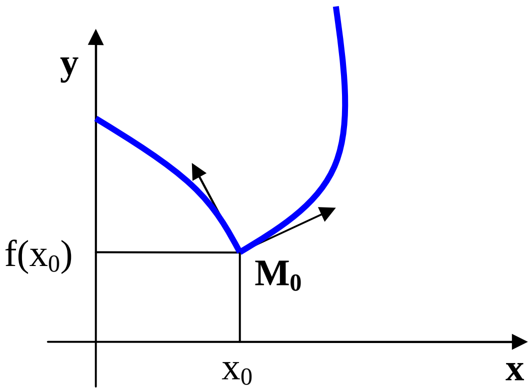
$$\boxed{(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'\left[f^{-1}(a)\right]}}$$

5- Extension du nombre dérivé :

a) Point anguleux

Soit f une fonction numérique admettant au point x_0 un nombre dérivé à gauche $f_g'(x_0)$ différent du nombre dérivé à droite $f_d'(x_0)$. On dit que la fonction f **n'est pas dérivable en x_0** et le point d'abscisse x_0 est **un point anguleux** de la courbe (C_f).

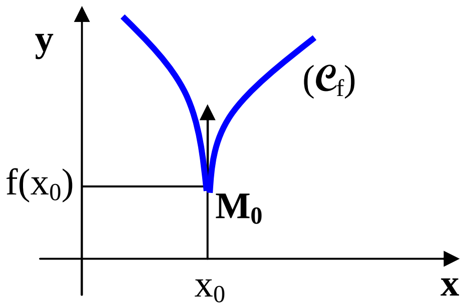


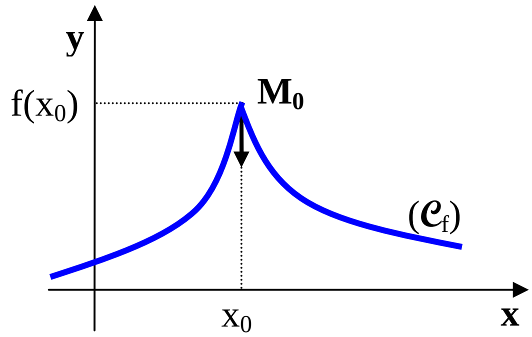


La courbe présente au point d'abscisse x_0 deux demi tangentes.

- Une demi tangente à gauche de pente = $f_g'(x_0)$;
- Une demi tangente à droite de pente = $f_d'(x_0)$.

b) Point de rebroussement ou un pic :





Si $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$;

Alors la courbe $(\mathcal{C}_f)$ présente au point d'abscisse x_0 une demi-tangente verticale dirigée vers le haut. On dit que le point d'abscisse x_0 est un point de rebroussement ou un pic.

Si $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$;

Alors la courbe $(\mathcal{C}_f)$ présente au point d'abscisse x_0 une demi-tangente verticale dirigée vers le bas. On dit que le point d'abscisse x_0 est **un point de rebroussement ou un pic.**

E- / Inégalités des Accroissements Finis :

Soit f une fonction dérivable sur I = [a ; b] où a et b sont des réels.

- **Première Forme :**

Si $a \leq b$ et si les réels m et M sont tels que : $\forall\ x \in [a\,;b]$
$m \leq f\,'(x) \leq M$ alors $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$

- **Deuxième Forme :**

Si k est un réel tel que : $\forall\ x \in [a\,;b] = I$,
$|f\,'(x)| \leq k$ alors $|f(b) - f(a)| \leq k\,|b-a|$

Exemple : soit f la fonction définie sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$ par $f(x) = \sin x$.

Démontrer que pour tout x de $\left[0\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$ on a : $\dfrac{\sqrt{2}}{2}x \leq \sin x \leq x$.

F-/ Dérivabilité et continuité :

1- Théorème 6 : (admis)

Si une fonction numérique est dérivable en un point, elle est continue en ce point.
Par contre, une fonction continue en un point n'est pas nécessairement dérivable en ce point.

2- Exemple : $f : x \mapsto f(x) = |x|$ est continue en x = 0, **mais pas dérivable en x = 0.**

I – Quelques propriétés géométriques :

1. Fonctions paires :

Une fonction numérique f d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ est dite paire si, et seulement si **$\forall x \in \mathcal{D}_f, (-x) \in \mathcal{D}_f$; $f(-x) = f(x)$.**

La courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

2. Fonction impaire :

Une fonction numérique f d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ est dite impaire si, et seulement si $\forall x \in \mathcal{D}_f, (-x) \in \mathcal{D}_f$; $f(-x) = -f(x)$.

L'origine du repère est centre de symétrie pour la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f dans un repère cartésien.

3. Axe de symétrie d'une représentation graphique :

Dans un repère orthogonal la droite (D) d'équation x = a , (a $\in \mathbb{R}$) est axe de symétrie pour la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f, si et seulement si $f(2a - x) = f(x)$.

4. Centre de symétrie d'une représentation graphique :

Le repère étant quelconque, le point I (a ; b) est un centre de symétrie pour la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f si et seulement si, $f(2a-x) + f(x) = 2b$.

5. Fonctions périodiques :

Une fonction numérique f est périodique si, seulement si il existe un réel strictement positif t tel que $\forall x \in \mathcal{D}_f$ $f(x+t) = f(x)$.

On dit alors que t est une période de f .

- Si f(x) = cos(ax +b) alors la période $T = \dfrac{2\pi}{|a|}$;
- Si f(x) = sin(ax +b) alors la période $T = \dfrac{2\pi}{|a|}$;
- Si f(x) = tan(ax +b) alors la période $T = \dfrac{\pi}{|a|}$.

II – Plan d'étude d'une fonction numérique :

Pour étudier une fonction numérique nous adopterons le plan suivant :

- Déterminer l'ensemble de définition (étudier la continuité)
- Etudier éventuellement la parité. Recherche de la période, des symétries afin de réduire l'intervalle d'étude.
- Etudier les limites aux bornes de l'ensemble de définition ;
- Calculer la fonction dérivée et étudier son signe ; indiquer le sens de variation.
- Consigner dans un tableau de variation les résultats précédents.
- Déterminer les points remarquables à l'étude de la fonction
- Points d'intersection de la courbe avec les axes de coordonnées
- Points d'inflexion etc.

III – Exemple d'étude de fonctions polynômes :

1- Théorème 1: Si f admet un extremum relatif d'abscisse x_0, alors $f'(x_0) = 0$ ou f n'est pas dérivable en x_0.

2- Théorème 2: Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert]a ; b[.

Si $f'(x)$ s'annule en x_0 de]a ;b[en changeant de signe, alors f admet un extremum en x_0.

3- Exemple : Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

a) Etudier les variations de f ;

b) Montrer que f admet un point d'inflexion que l'on précisera. On déterminera les intersections de la courbe ($\mathcal{C}_f$) de f avec les axes de coordonnées.

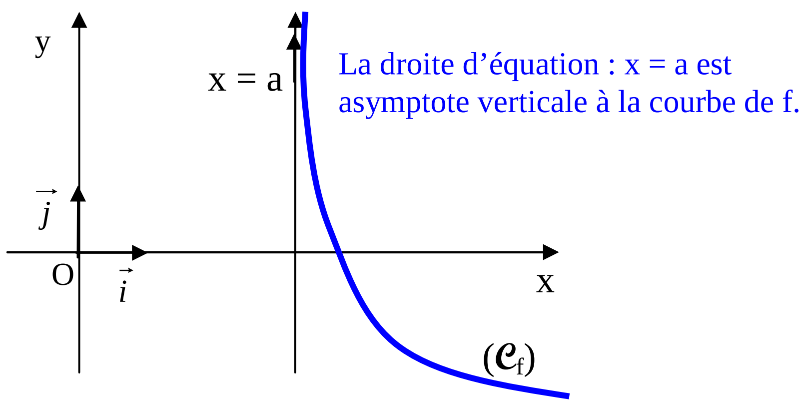
c) Tracer la courbe ($\mathcal{C}_f$) de f dans un repère orthonormé. Quels sont les extremums relatifs de f ?. En quels points sont-ils atteints ?.

IV – Exemple d'étude de fonctions rationnelles :

1- Recherche d'asymptotes parallèles aux axes de coordonnées :

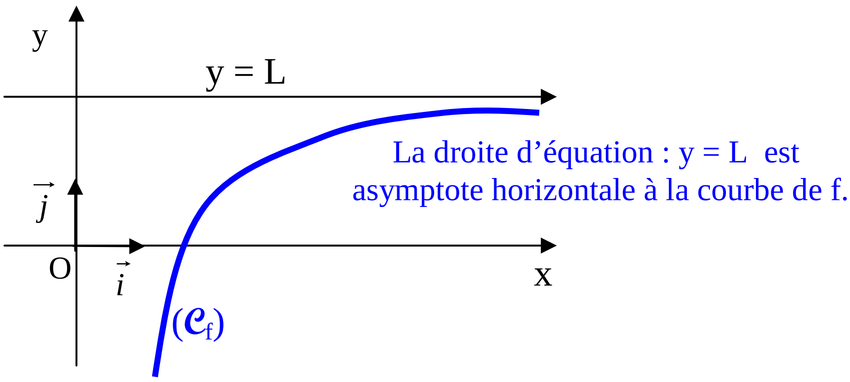
a) Asymptote Verticale :

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty \ ou -\infty$ alors la droite d'équation x = a est asymptote verticale à la courbe ($\mathcal{C}_f$) de f.



b) Asymptote horizontale :

Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = L\ (réel)$,alors la droite d'équation y = L est asymptote horizontale à la courbe ($\mathcal{C}_f$) de f .



2- Exemple : Étudier et représenter la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x+2}{x-1}$.

3- Asymptote oblique :

- Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, alors il y a possibilité d'asymptote oblique en $\pm\infty$.

- Si $f(x) = ax + b + C(x)\ \ avec\ \lim\limits_{x \to \pm\infty} C(x) = 0$; alors la droite d'équation y = ax+b est asymptote oblique à la courbe au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$.

- La droite ($\mathcal{D}$) d'équation : y = ax + b est dite asymptote oblique à la courbe au voisinage de de $+\infty$ ou $-\infty$; si et seulement, si
$$\lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - (ax+b) \right] = 0.$$

4- Position de la courbe par rapport à son asymptote oblique :

Pour étudier la position de la courbe ($\mathcal{C}_f$) de f par rapport à son asymptote oblique ($\mathcal{D}$) d'équation : y = ax + b ; on étudie le signe de $f(x) - (ax+b)$ dans $\mathcal{D}$f.

1er cas : Si $[\, f(x) - (ax+b) \,] < 0$; alors la courbe ($\mathcal{C}_f$) est en dessous de ($\mathcal{D}$).

2ème cas : Si $[\, f(x) - (ax+b) \,] > 0$; alors la courbe ($\mathcal{C}_f$) est au dessus de ($\mathcal{D}$).

3ème cas : Si $[\, f(x) - (ax+b) \,] = 0$; alors la courbe ($\mathcal{C}_f$) coupe ($\mathcal{D}$) en un point x_0.

5- Exemple : Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x^2-5x+15}{x-2}$.

a) Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}$;

b) Montrer que la courbe ($\mathscr{C}_f$) de f admet une asymptote oblique ($\mathscr{D}$) à préciser ;

c) Etudier la fonction f ;

d) Montrer que le point I (2 ; –1) est centre de symétrie pour la courbe ($\mathscr{C}_f$) de f ;

e) Etudier la position relative de ($\mathscr{C}_f$) par rapport à ($\mathscr{D}$) ;

f) Construire ($\mathscr{D}$) et ($\mathscr{C}_f$) dans un repère orthonormé.

6- Recherche de l'asymptote oblique :

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. S'il existe deux réels a et b tels que :

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a \quad et \quad \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\,f(x)-ax\,\right]=b$ alors la courbe ($\mathscr{C}_f$) de f admet pour asymptote la droite ($\mathscr{D}$) : y = ax + b au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$.

Dans cette recherche 5 cas peuvent se présenter qu'on résume dans le tableau ci-dessous.

<table>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$</td><td></td><td>$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\,f(x)-ax\,\right]$</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">a (a ϵ $\mathbb{R}$)</td><td rowspan="3">Direction asymptotique Δ définie par la droite d'équation : y = ax</td><td>b (b ϵ $\mathbb{R}$)</td><td>Asymptote oblique : y = ax + b.</td></tr>
<tr><td>$+\infty$ ou $-\infty$</td><td>Branche parabolique de direction Δ.</td></tr>
<tr><td>Pas de limite</td><td></td></tr>
<tr><td>$+\infty$ ou $-\infty$</td><td>Direction asymptotique Δ définie par la droite d'équation : x = 0.</td><td></td><td>Branche parabolique de direction Δ.</td></tr>
<tr><td>Pas de limite</td><td>Pas de direction asymptotique</td><td></td><td></td></tr>
</table>