LES ISOMÉTRIES DU PLAN

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

I– Définitions:

a) Activité : Soit $f : \mathscr{P} \rightarrow \mathscr{P}$

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad tel\ que \quad \begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y - 2 \end{cases}$$

Soit $N\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ d'image $N'\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix}$ comparer les distances d (M, N) et d (M', N').

-- 0 --

Réponse : d (M, N) = d (M', N'). On dit que f conserve la distance.

b) Définition 1 : On appelle isométrie du plan toute application affine du plan qui conserve la distance de deux points.
Exemples : la translation, la symétrie orthogonale sont des isométries.

c) Déplacements et antidéplacement :
- Si f est une isométrie de (P), on a dit que f est un Déplacement de ($\mathscr{P}$) si f conserve les mesures des angles orientés.
- On dit que f est un Antidéplacement si les angles orientés sont changés en leur opposé.
- Toute isométrie du plan est soit un déplacement soit un antidéplacement.

d) Notations : On note $\mathscr{I}^+$ l'ensemble des déplacements de $\mathscr{P}$; et $\mathscr{I}^-$ l'ensemble des antidéplacements de $\mathscr{P}$. $\mathscr{I}^+ \cup \mathscr{I}^- = \mathscr{I}$ ensemble des isométries du plan.
Remarque : Toute isométrie est une transformation.

II – Isométries vectorielles:

a) Définition : On appelle isométrie vectorielle toute application linéaire **φ** associée à une isométrie f .

b) Propriétés : $\forall$ ($\vec{u}$; $\vec{v}$) $\in$ $\mathscr{V}^2$.

P_1 : $\|\varphi(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|$;

P_2 : $\varphi(\vec{u}) \bullet \varphi(\vec{v}) = \vec{u} \bullet \vec{v}$;

c) Théorème : (admis)
Une application affine du plan est une isométrie si et seulement si son application linéaire associée conserve la norme de tout vecteur de $\mathscr{V}$ ou le produit scalaire de tout couple de vecteurs de $\mathscr{V}$.

III– Déplacements et Antidéplacements :

Une isométrie de $(\mathscr{P})$ f laissant un point O invariant est une rotation ou une réflexion.
Soient A, B et C trois points non alignés de $(\mathscr{P})$. A'= f (A) , B'= f (B) et C'= f (C) sont aussi trois points non alignés.
Dans le cas où f est une rotation, alors les angles orientés $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ et $\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right)$ admettent une même mesure.

Dans le cas où f est une réflexion, les angles $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ et $\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right)$ admettent des mesures opposées.

De plus, les translations conservent les angles orientés.
On en déduit alors que pour une isométrie f quelconque, si O un point fixé dans $(\mathscr{P})$, en écrivant f = t∘g où t est une translation et g une isométrie laissant O invariant, le fait que f conserve ou non les angles orientés ne dépend que de la nature de g.

Propriété1:
Toute isométrie f de $(\mathscr{P})$ est soit un déplacement, soit un antidéplacement.

Exemple 1:
Le plan $(\mathscr{P})$ orienté est un muni d'un repère orthonormé direct.
Soit f est l'application qui, au point M(x , y) associe le point M'(x' , y') avec
$\begin{cases} x' = -y+1 \\ y' = x+2 \end{cases}$.

a) f est une isométrie. Pour le voir , il suffit de prendre 2 points A(a,b) et B(c,d).
f (A) (– b + 1 , a + 2) , f (B)(– d +1 , c + 2) et de vérifier directement que AB = f(A) f(B).

b) Pour savoir si f est un déplacement ou un antidéplacement, il suffit de savoir si f conserve un angle orienté.
On peut donc prendre une exemple. Pour O(0,0) , A(1,0) et B(0,1) , on a :
O' = f (O) avec O' (1,-2) , A' = f (A) avec A'(1,-1) et B'= f (B) avec B'(0,-2).
On remarque que $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{2}$ et $\left(\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'B'}\right) = \frac{\pi}{2}$. f conserve donc l'orientation , c'est un déplacement.

c) f n'admet aucun point invariant car le système { x = – y +1 ; y = x + 2 } n'admet aucun couple (x ;y) comme solution.
Le point O'(1, –2) étant l'image de O par f, posons t comme la translation vérifiant t(O) = O'.
L'isométrie f se décompose alors en f = tog où g est un déplacement laissant O invariant. C'est donc une rotation de centre O.
On vérifie sans peine que g est la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Exemple 2:

f est l'application qui, au point M(x , y) associe le point M'(x' , y') avec $\begin{cases} x' = y - 1 \\ y' = x + 1 \end{cases}$.

a) On vérifie directement que f est bien une isométrie.

b) Si on pose t comme étant la translation de vecteur $\vec{u}(-1\,;\,1)$, on remarque que : f = t∘g où g est l'application qui associe au point M(x , y) le point M'(y , x) . g est donc la réflexion par rapport à la droite (D) d'équation : y = x.

Donc, f est un antidéplacement.

Propriété 2:

La composée de 2 déplacements est un déplacement.
La composée de 2 antidéplacements est un déplacement.
La composée d'un déplacement et d'un antidéplacement est un antidéplacement.
La réciproque d'un déplacement est un déplacement et la réciproque d'un antidéplacement est un antidéplacement.

Remarque : (Loi générale)

« La composée d’un nombre quelconque de déplacements et d’un nombre impair d’antidéplacements est un Antidéplacement ».

« La composée d’un nombre quelconque de déplacements et d’un nombre pair d’antidéplacements est un Déplacement ».

IV– Différentes isométries du plan :

A - Déplacement (Caractérisation, Composition, Expression analytique, Exemples)

Propriété 1:

Si deux déplacements f et g sont tels qu'il existe deux points A et B distincts tels que f(A)=g(A) et f(B)=g(B)
alors f = g.
En particulier, si un déplacement f admet deux points distincts invariants alors f est l'identité sur ($\mathscr{P}$).

Effectivement, la composée de deux déplacements est un déplacement et la réciproque d'un déplacement est un déplacement.
Donc, si f(A)=g(A) et f(B)=g(B) alors fog^{-1} est un déplacement admettant deux point invariants.
C'est donc une rotation ou une translation. Et donc l'application identité (car il y a deux points invariants distincts dans le plan ($\mathscr{P}$)).
D'où f = g.

Propriété 2:

Si A et B sont deux points distincts et si A' et B' sont deux points tels que AB = A'B' alors Il existe un unique déplacement f tel que f(A) = A' et f(B) = B'. De plus, f est soit une translation soit une rotation.

Propriété 3:
Si f et g sont 2 rotations de centres respectives A et B et d'angles respectifs a et b , alors $f \circ g$ est une rotation d'angle (a+b) à 2p près..
De plus, si f et g ont même centre alors $f \circ g$ est aussi de centre A = B .

En général, $f \circ g \neq g \circ f$.

Expressions Analytiques.
Un déplacement dans ($\mathscr{P}$) est une translation ou une rotation.
Dans le cas d'une translation t , de vecteurs de coordonnées (a ; b), l'expression analytique de t est :

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

Dans le cas de la rotation R de centre W(a;b) et d'angle θ , R est la composée de la rotation de centre O, centre du repère, et d'angle θ,
et de la translation de vecteur u(a ; b). $R = t \circ R'$, R' = rotation ce centre O , d'angle θ, et t translation de vecteur u(a;b).
On en déduit que l'expression analytique de R est :

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta + a \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta + b \end{cases}$$

Dans l'exemple précédent, l'expression analytique de f est :

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x - 1 \end{cases}$$

Remarquons que si A, B, A' et B' sont 4 points tels que AB = A'B' , il existe un unique déplacement f tel que f (A) = A' et f (B) = B'.
Dans le cas où ce déplacement est une rotation, l'angle θ▪ de cette rotation est déterminé par les relations:

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{A'B'}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{A'B'}\right\|} \text{ où } \quad dét\ (\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{A'B'}) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc \\ \sin\theta = \dfrac{dét\ \left(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{A'B'}\right)}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{A'B'}\right\|} \quad (a,b)\ \ et\ \ (c,d)\ \ les\ \ coordonnées\ de\ \ \overrightarrow{AB}\ \ et\ \ \overrightarrow{A'B'} \end{cases}$$

Exemple :

$A(0\,;\,0)\quad B(-1\,;\,\sqrt{3})\quad A'(2\,;\,-1)\quad B'(0\,;-1)$

On a AB = A'B' = 2. Donc l'existence d'un déplacement f tel que f(A)=A' et f(B)=B' est assurée et celui-ci est une rotation.
En appliquant les formules précédentes, on détermine alors que l'angle de cette rotation vérifie: $\cos(\theta)=\frac{1}{2}\ \ et\ \ \sin(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \ donc\ \ \theta=\frac{\pi}{3}\ \ à\ \ 2k\pi\ \ près$.
Un simple calcul en utilisant les médiatrices de [AA'] et [BB'] donne que leur point d'intersection est W(2 ; -1).

f est déterminée par l'expression analytique suivante: $\begin{cases} x'=\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y+2 \\ y'=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y-1 \end{cases}$

B) – Antidéplacement

On sait que la composée d'un nombre pair d'antidéplacements est un déplacement, c'est à dire, une translation ou une rotation.
On sait aussi que si S et S' sont deux réflexions par rapport à des droites (D) et (D'), alors:

- S∘S' est un translation si (D) et (D') sont parallèles, le vecteur u de la translation étant un vecteur normal à (D) et (D').
- S∘S' est une rotation sinon, le centre de cette rotation étant le point d'intersection de (D) et (D'), l'angle de cette rotation étant 2 Angles (D', D), l'angle (D', D) étant donné à π près.

Soit f un antidéplacement de (P).
Soit S une réflexion quelconque. La composée g = f∘S est alors un déplacement, donc une translation ou une rotation.
On peut donc écrire que g = S''∘S' où S'' et S' sont deux réflexions, S' étant choisie arbitrairement.
Comme S∘S =identité sur (P), on a alors : S''∘S'∘S = f
On voit donc que:

Propriété 1:

Tout antidéplacement est la composée d'un déplacement et d'un réflexion :

$f = g \circ S$ Ce produit est alors de deux natures: g est soit une translation, soit une rotation. Pour g translation on a 2 cas:

- **1er cas : le vecteur u de cette translation est normal à (D), axe de la réflexion S.**
  On écrit alors $g = S'' \circ S'$ où S'' et S' sont deux réflexions d'axes parallèles (D'') et (D'), avec u normal à (D'')et (D').
  Donc, les droites (D), (D') et (D'') sont parallèles.
  On peut alors choisir (D') = (D). Donc S'= S et $f = S'' \circ S' \circ S = S''$. Donc, f est la réflexion S''.
- **2ème cas : le vecteur u n'est pas normal à (D).**
  On écrit u = v + w où v est un vecteur directeur de (D) et w un vecteur normal de (D).
  Les translations T_v et T_w de vecteurs respectifs v et w vérifient alors $g = T_v \circ T_w$.
  On a a donc $f = T_v \circ (T_w \circ S)$. Comme $(T_w \circ S)$ est une réflexion d'axe (D'') parallèle à (D) d'après le cas 1, on en déduit que f est la composée d'un translation de vecteur v et d'un réflexion d'axe (D''), v étant vecteur directeur de (D'').

D'où:

Propriété 2:

La composée d'une translation T de vecteur u et d'une réflexion S d'axe (D) est
- une réflexion si u est normal à (D)
- la composée d'un translation T_v de vecteur v, directeur de (D), et d'une réflexion d'axe parallèle à (D) sinon.

On voit sur les figures ci-dessous les deux cas:

Figure 1 : Le vecteur $\vec{u}$ est normal à (D)

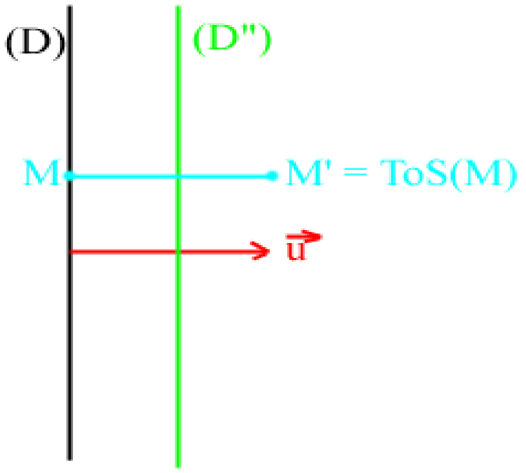
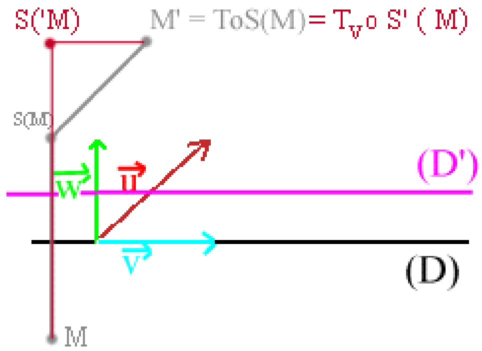


Figure 2: Le vecteur u n'est pas normal à (D)



Conclusion :

Un produit (ou une composition) d'un nombre impair d'antidéplacements se décompose en :

- Soit une réflexion
- Soit une composée d'un translation et d'une réflexion le vecteur de la translation étant un vecteur directeur de l'axe de la réflexion.

V– Classification des isométries :

1- Comment identifier une isométrie :

Pour reconnaître une isométrie f on cherche l'ensemble des points invariants.

	Nature de l'isométrie	
Ensemble des points invariants par f	Déplacement	Antidéplacement
$\mathscr{P}$	$f = \mathrm{Id}\mathscr{P}$	
(Δ)		$f = S_\Delta$ *symétrie orthogonale*
$\{\Omega\}$	$f = r_{(\Omega\ \theta)}$	
Pas de points invariants	$f = t_{\vec{u}}\ (\vec{u} \neq \vec{0})$ si $\overrightarrow{MM'} = Cste$	$\overrightarrow{MM'} \neq Cste \Rightarrow f =$ *symétrie glissée*

2 – Expression analytique d'une isométrie :

a) **Théorème :** Une application affine de P dans P est un déplacement si et seulement, si son expression analytique est de la forme

$$\begin{cases} x' = ax - by + c \\ y' = bx + ay + c' \end{cases} \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont des réels tels que } a^2 + b^2 = 1.$$

- **Si a = 1 et b = 0 ,** Alors $\begin{cases} x' = x + c \\ y' = y + c' \end{cases}$ *Expression de la translation de vecteur* $\vec{U}\begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$;
- **Si a ≠ 0 et b ≠ 0,** c'est la rotation dont le centre est le point invariant par f et dont l'angle α est tel que :

$$\begin{cases} \cos\alpha = a \\ \sin\alpha = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{A'B'}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{A'B'}\right\|} \\ \sin\alpha = \dfrac{dét\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right)}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{A'B'}\right\|} \end{cases}$$

b) Remarque :

Soit une application affine f et φ son application linéaire associée.

- (**dét Mφ = 1**) ⇔ (f est un **Déplacement**) .
- (**dét Mφ = – 1**) ⇔ (f est un **Antidéplacement**) .

Exercice d'application :

Le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}\ ;\ \vec{j})$.
Soit f l'application de P dans P qui à tout point M(x ; y) associe le point M'(x' ; y') avec $\begin{cases} x' = y+1 \\ y' = x+2 \end{cases}$.

1) Montrer que est une isométrie affine. f est-elle un déplacement ? un antidéplacement ?.
2) Démontrer que l'ensemble des points I milieux des segments [MM'] est une droite ($\mathcal{D}$).
3) Déterminer l'expression analytique de la symétrie orthogonale $\mathcal{S}$ par rapport à $\mathcal{D}$.
4) Déterminer t tel que $f = \mathcal{S} \circ$ t.

Correction :

1) Soient $M_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \mapsto M_1'\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$ $\quad et \quad$ $M_2\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto M_2'\begin{pmatrix} x_2' \\ y_2' \end{pmatrix}$

$$\left\| \overrightarrow{M_1M_2} \right\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \ ;$$

$$\left\| \overrightarrow{M_1'M_2'} \right\| = \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2} = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2} = \left\| \overrightarrow{M_1M_2} \right\| \ ;$$

D'où f conserve la distance ; par conséquent f est une isométrie.

- Ensemble des points invariants par f .

$\begin{cases} x = y+1 \\ y = x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = -2 \end{cases}$ *pas de points invariants* .

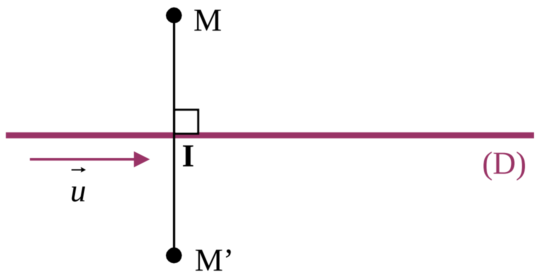
Le vecteur $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} y+1-x \\ x+2-y \end{pmatrix}$ est non constant ; $\overrightarrow{MM'} \neq Cste$ c'est-à-dire non colinéaire à un vecteur constant ($\overrightarrow{MM'} = k\vec{v}$; $\vec{v}$ *vecteur constant*).Donc f n'est pas un déplacement, c'est donc un antidéplacement (une symétrie glissée).

2)

$$\begin{pmatrix} \frac{x'+x}{2} \\ \frac{y'+y}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x+y+1}{2} \\ \frac{x+2+y}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x+y}{2}+\frac{1}{2} \\ \frac{x+y}{2}+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad on \quad remarque \quad que : X = Y - \frac{1}{2} \Leftrightarrow X - Y + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(D) : 2X - 2Y + 1 = 0 \quad ; \quad \vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \; est \;\; un \;\; vecteur \;\; directeur .$$

3)



$$\begin{cases} \overrightarrow{MM'} \bullet \vec{u} = 0 \\ I \in (D) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x'-x) + 2(y'-y) = 0 \\ x'+x-y'-y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'+y'=x+y & (1) \\ x'-y'=-x+y-1 & (2) \end{cases}$$

$(1)+(2) \Rightarrow x' = y - \frac{1}{2} \; ; \Rightarrow y' = x + \frac{1}{2}$. D'où l'expression analytique de S est :

$$\begin{cases} x' = y - \frac{1}{2} \\ y' = x + \frac{1}{2} \end{cases} .$$

4) f étant une symétrie glissée, $f = S \circ t$. $f = S \circ t \quad \Leftrightarrow \quad t = S \circ f$

$$f : \begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = x + 1 \end{cases} \qquad et \qquad S : \begin{cases} x' = y - \frac{1}{2} \\ y' = x + \frac{1}{2} \end{cases} \; M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \overset{f}{\mapsto} M_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \overset{S}{\mapsto} M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} ;$$

$$\begin{cases} x_1 = y + 1 \\ y_1 = x + 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = y_1 + 1 \\ y' = x_1 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + 2 - \frac{1}{2} \\ y' = y + 1 + \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + \frac{3}{2} \\ y' = y + \frac{3}{2} \end{cases} .$$

D'où t est la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \; ; \; \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.