LES SIMILITUDES PLANES

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

I – Définition:

Soit $\mathscr{P}$ le plan affine euclidien. S une application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$. On dit que S est une similitude de $\mathscr{P}$ s'il existe un nombre réel k $>$0, tel que quels que soient les points A et B distincts d'images respectives A' et B' par S, $\|\overrightarrow{A'B'}\| = k \|\overrightarrow{AB}\|$.

(f Similitude de $\mathscr{P}$) $\Leftrightarrow$ ($\exists\, k \in \mathbb{R}_+^* / \forall (A\,;B) \in \mathscr{P}^2\ \|\overrightarrow{A'B'}\| = k\|\overrightarrow{AB}\|$ avec ; (S(A)=A' ; S(B)=B') .

1) Théorème:

Etant donnée une similitude S de rapport k (k $>$ 0) ; il existe une homothétie h_k et une isométrie i telle que $S= h_k \circ i$.

2) Conséquence :

S est une similitude $\Leftrightarrow$ son application linéaire associée est sous la forme : k$\boldsymbol{\varphi}$ où $\boldsymbol{\varphi}$ est une isométrie.
- Si $\boldsymbol{\varphi}$ est un déplacement la similitude est dite **directe** ;
- Si $\boldsymbol{\varphi}$ est un antidéplacement la similitude est dite **indirecte** ;

II – Similitudes directes:

1) Définition :

(S similitude directe) $\Leftrightarrow$ (S est une bijection transformant les distances dans un rapport constant k et conservant les angles orientés) $\Leftrightarrow$ (S est la composée d'une homothétie de rapport k positif et d'une rotation de même centre) $\Leftrightarrow$ (S admet pour écriture complexe z' = az + b, a $\in \mathbb{C}$, b $\in \mathbb{C}$, dans un repère orthonormé direct du plan).

2) Exemples et contre-exemples :

- Les homothéties, les Translations, les Rotations et leurs composées sont des similitudes directes ;

- Les Réflexions ou symétries orthogonales conservent les distances, mais ne conservent pas les mesures des angles orientés : ce ne sont pas des similitudes directes.

3) Caractérisation et reconnaissance :

a)- Comment reconnaître qu'une application S est une similitude directe :

- S est une bijection transformant les distances dans un rapport constant k et conservant la mesure des angles orientés ;
- S est la composée d'une homothétie de rapport k positif et d'une rotation d'angle θ de même centre ;
- S admet pour écriture complexe z' = az + b, a ∊ ℂ*, b ∊ ℂ, |a |= k et arg(a)= θ.

b)- Comment caractériser une similitude directe S :

- Si S transforme un couple (A ; B), A≠ B en (A' ; B') alors

$$\begin{cases} Son \quad rapport \;\; k = \dfrac{A'B'}{AB} \\ Son \quad angle \quad \hat{\alpha} = \left(\overrightarrow{AB},\, \overrightarrow{A'B'}\right) \end{cases}$$

- Si S admet pour écriture complexe z'= az + b a ∊ ℂ*, b ∊ ℂ, dans un repère orthonormé direct alors :
  - ❖ Si a = 1, S est une translation ; le vecteur de translation est l'affixe de b ;
  - ❖ Si a ≠ 1, S est une similitude $\begin{cases} de \;\; rapport = \mathrm{mod}ule \;\; de \;\; a = \left| k \right| \\ d'angle = \arg(a)................... \end{cases}$.

  Le centre de la similitude est l'ensemble des points invariants.

- Dans une base orthonormée directe si l'expression analytique de S est de la forme : $\begin{cases} x' = ka_1 x - kb_1 y + c \\ y' = kb_1 x + ka_1 y + c' \end{cases}$ la matrice de la similitude directe $S_{k,\vartheta}$ est

$$A = \;\; k \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\cos\theta & -k\sin\theta \\ k\sin\theta & k\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 & -kb_1 \\ kb_1 & ka_1 \end{pmatrix}.$$

On aura détA = $k^2 \cos^2\theta + k^2 \sin^2\theta = k^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = k^2$.

Donc dét A = $k^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = \sqrt{détA}$.

Le centre de la similitude est l'ensemble des points invariants.

Pour déterminer l'angle θ de la similitude on pose : $\begin{cases} \cos\theta = a_1 \\ \sin\theta = b_1 \end{cases}$.

4) Exercice d'application :

Soit f l'application définie analytiquement par : $\begin{cases} x' = x + \sqrt{3}\, y - \sqrt{3} \\ y' = -\sqrt{3}\, x + y + \sqrt{3} \end{cases}$ dans un repère orthonormé directe $\left(O\,;\, \vec{i}\,;\, \vec{j}\,\right)$.

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f .

b) Déterminer son écriture complexe.

Correction

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow k=\sqrt{détA}=\sqrt{1+3}=2 \qquad rapport = 2$

- Centre (point invariant) :

$$\begin{cases} 0x+\sqrt{3}y=\sqrt{3} \\ -\sqrt{3}x+0y=-\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow x=1 \ et \ y=1 \ . \ \Omega\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \ est \ le \ centre$$

- Recherche de l'angle :

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} \cos\alpha=\frac{1}{2} \\ \sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \alpha=-\frac{\pi}{3}.$$

$f=h_{(\Omega;2)}\circ r_{(\Omega;-\frac{\pi}{3})}$. f est une similitude directe de rapport k = 2 et de centre

$\Omega\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et d'angle $\alpha=-\frac{\pi}{3}$.

b) Mettons sous la forme de z' = az + b avec z = x + iy et z' = x' + iy'.

$$x' + iy' = (x + \sqrt{3}y - \sqrt{3}) + i(-\sqrt{3}x + y + \sqrt{3})$$
$$= x + \sqrt{3}y - \sqrt{3} - i\sqrt{3}x + iy + i\sqrt{3}$$
$$= (1- i\sqrt{3})x + (\sqrt{3} + i)y - \sqrt{3} + i\sqrt{3}$$
$$= (1- i\sqrt{3})x + i(1 - i\sqrt{3})y - \sqrt{3} + i\sqrt{3}$$
$$= (1- i\sqrt{3}) (x + iy) - \sqrt{3}(1 - i)$$

$z' = (1- i\sqrt{3}) z - \sqrt{3} + i\sqrt{3}$. D'où f est une similitude directe.

- Eléments caractéristiques : a = $1- i\sqrt{3} \Rightarrow k =|a|= \sqrt{1+3}=2$; k = 2 ;
- Ensemble des points invariants :

$z = (1- i\sqrt{3}) z - \sqrt{3} + i\sqrt{3} \Leftrightarrow i\sqrt{3}\ z = - \sqrt{3} + i\sqrt{3} \Leftrightarrow$ z =1+i. Le point invariant est le point $\Omega\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ d'affixe z =1+ i.

- Angle = Arg(a) :

$$\begin{cases} \cos\alpha=\frac{1}{|a|}=\frac{1}{2} \\ \sin\alpha=\frac{-\sqrt{3}}{|a|}=-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \alpha=-\frac{\pi}{3}.$$

D'où f est une similitude directe de centre Ω de rapport 2 et d'angle : $-\frac{\pi}{3}$.

III – Similitudes indirectes:

1) Définition :

(S similitude indirecte) ⇔ (S est la composée d'une homothétie et d'un antidéplacement) ⇔ (S a pour écriture complexe : z' = a$\bar{z}$ + b).

2) Caractérisation :

Une similitude indirecte de rapport (module de a) ; son centre (le point invariant) ; son axe (celui de la symétrie orthogonale entrant dans la décomposition).

IV – Nombres complexes et transformations:

1 – Translations

Soient M et M' deux points d'affixes respectifs z et z'. Le vecteur $\vec{u}$ d'affixe **a**.

La transformation : **z' = z + a**, avec **a** $\in \mathbb{C}$, définit M' comme l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe **a**.

Exemple : Soit t la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $z_{\vec{u}} = 2 + i$.

Déterminer l'écriture complexe de la transformation t.

Soit M' le point d'affixe z', image de M d'affixe z par la transformation t.

$t_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow z' - z = z_{\vec{u}} \Leftrightarrow z' - z = 2 + i \Leftrightarrow z' = z + (2 + i)$.

L'écriture complexe de la translation t est : $z' = z + 2 + i$.

2– L'Homothétie :

Soient M et M' deux points d'affixes respectifs z et z'.

La transformation : **z' = α z**, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, définit M' comme l'image de M par l'homothétie de centre O origine du repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ et de rapport α.

Exemple1 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\ ; \vec{i}\ ; \vec{j})$. On considère l'homothétie h de centre O et de rapport 3. Déterminer l'écriture complexe de la transformation h .

- Soit M' le point d'affixe z', image de M d'affixe z par l'homothétie h .

$$h(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = 3\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow z' = 3z.$$

L'écriture complexe de l'homothétie h est : $z' = 3z$.

3– L'Homothétie excentrée:

Soient M et M' deux points d'affixes respectifs z et z'. Soit Ω un point du plan d'affixe Z_Ω .

La transformation : **z'– Z_Ω = α (z – Z_Ω)**, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, définit M' comme l'image de M par l'homothétie de centre Ω et de rapport α .

Exemple 2 :

Soit h l'homothétie de centre Ω d'affixe $z_\Omega = 2 + i$ et de rapport –2. Déterminer l'écriture complexe de la transformation h .

- Soit M' le point d'affixe z', image de M d'affixe z par l'homothétie h .

$$h_\Omega(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = -2\overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow z' - z_\Omega = -2(z - z_\Omega)$$

$$z' - (2 + i) = -2z + 2(2 + i) \Leftrightarrow z' - 2 - 2i = -2z + 4 + 2i \Leftrightarrow z' = -2z + 6 + 4i.$$

L'écriture complexe de l'homothétie h est : $z' = -2z + 6 + 4i$.

4 – La Rotation :

Soient M et M’ deux points d’affixes respectifs z et z’.
Soit **b** un nombre complexe de module **1** et d’argument θ.
$\forall z \in \mathbb{C} \quad bz = e^{i\theta} z = |z| e^{i\theta + Arg(z)}$, ce qui signifie que $OM' = OM$ et $\left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}\right) = \theta + 2k\pi$, avec k $\in \mathbb{Z}$.
La transformation : **z’ = $e^{i\theta}$z**, définit M’ comme l’image de M par la rotation de centre O origine du repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ \right)$ et d’angle θ .

5 – La Rotation excentrée :

Soient M et M’ deux points d’affixes respectifs z et z’.
Soit b un nombre complexe de module **1** et d’argument θ.
Soit Ω un point du plan d’affixe Z_Ω .
La transformation : **$Z' - Z_\Omega = e^{i\theta}\ (Z - Z_\Omega)$**, définit M’ comme l’image de M par la rotation de centre Ω et d’angle θ.

Exemple :

Soit la rotation r de centre A d’affixe $Z_A = 3i$ et d’angle $\theta = \frac{\pi}{2}$. Déterminer l’écriture complexe de la transformation r.

- Soit M’ le point d’affixe z’, image de M d’affixe z par la rotation r.

$$r_A(M) = M' \Leftrightarrow AM' = AM \ \ et \ \ (\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AM'}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow z' - z_A = b(z - z_A) \text{ avec } b = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{i\frac{\pi}{2}} = i.$$

$$Donc \qquad z' - z_A = b(z - z_A) \Leftrightarrow$$

$$z' - 3i = i(z - 3i) \Leftrightarrow$$

$$z' - 3i = iz + 3 \Leftrightarrow$$

$$z' = iz + 3i + 3 \Leftrightarrow$$

$$z' = i\ (z + 3) + 3.$$

L’écriture complexe de la rotation r est : $z' = i\ (z + 3) + 3$.