** *Devoir* 1 **

EXERCICE I : (7 points)

On considère le nombre complexe Z = $(1-\sqrt{3}) - i\,(1+\sqrt{3})$
1) Ecrire sous forme algébrique Z^2.
2) Trouver le module et un argument de Z^2, en déduire le module et un argument de Z
3) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{17\pi}{12}$ et $\sin\frac{17\pi}{12}$
4) En utilisant ce résultat résoudre pour x $\in]-\pi\ ;\ \pi]$ l'équation :

$$(1-\sqrt{3})\cos x - (1+\sqrt{3})\sin x = 2.$$

EXERCICE II : (9 points)

1) Ecrire sous forme algébrique les solutions de l'équation: $Z^6 = -1$.
   En déduire les solutions de l'équation :

$$(z - i\sqrt{3})^6 = i^2\,(\sqrt{3}z - 2i)^6.$$

2) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ $\cos^5 x = \frac{1}{16}(\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x)$.

EXERCICE III : (4 points)

1) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que: $\text{Arg}\left(\frac{z-2}{z+i}\right) = \frac{\pi}{2}$
2) Démontrer que quels que soient les nombres complexes U et U' de module 1 vérifiant UU'+1 ≠ 0, le nombre Z = $\frac{u+u'}{1+uu'}$ est réel.

DEVOIR N°2

EXERCICE 1 : (5 points)

Soit l'équation (E) : $z^3 - 2iz^2 - 4z + 8i = 0$

1) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure z_0 qu'on déterminera.
2) Résoudre (E).
3) Déterminer l'ensemble (**Γ**) des points M, d'affixe t, tels que t^2 soit un réel.

EXERCICE 2 : (5 points)

Cet exercice est composé de deux parties indépendantes.

1) Trouver suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne par 4 des nombres 7^n et 3^n.
   En déduire le reste de la division euclidienne de $7^n - 3^n$ par 4.
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 = 0$

EXERCICE 3 : (5 points)

Z est un nombre complexe différent de 1. On pose $z' = \frac{z-1}{\overline{z}-1}$ et $r = \frac{z'+1}{z-1}$

1) Comparer $|z-1|$ et $|\overline{z}-1|$

2) Déterminer $|z'|$

3) On appelle A, B, M et M' les points du plan complexe d'affixes respectives 1, −1, z et z'.
Calculer r en fonction de z et $\overline{z}$. En déduire que r est un réel.
Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$? On justifiera la réponse.

EXERCICE 4 : (5 points)

1) Trouver les nombres complexes z et t tels que :
$$\begin{cases} (2+i)z + (3+i)\overline{t} = 6-\sqrt{3} + i(2\sqrt{3}-1) \\ (1+3i)\overline{z} + (1+2i)t = \sqrt{3}(3-i) + 6i \end{cases}$$
2) Écrire sous leurs formes trigonométriques z, t et $\frac{z}{t}$
   En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

DEVOIR N°3

EXERCICE 1 : (5 points)

1) Calculer le module et l'argument de chacun des nombres complexes

$$z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} \quad et \quad z_2 = 1 - i$$

2) En déduire le module et l'argument de $Z = \frac{z_1}{z_2}$.

3) Utiliser les résultats précédents pour calculer $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

EXERCICE 2 : (5 points)

On considère l'application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f(z) = z^2 - (9 + 2i)z + 26$$

1) Déterminer les nombres complexes U tels que $U^2 = -3 + 4i$ puis résoudre l'équation f(z) = 0.
2) On pose z = x + iy. Déterminer l'ensemble des points M(x ;y) du plan complexe, tels que f(z) soit un réel. Préciser la nature de cet ensemble.
3) Soit les nombres complexes a et b définis par :

a = $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et b = $-\sqrt{3} + i$. Écrire : a ; b ; $\frac{b}{a}$ sous forme trigonométrique.

Problème :

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes on considère le polynôme complexe $f(z) = z^3 - 4z^2 + 6z - 4$

1) Montrer que l'équation f(z) = 0 admet une solution réelle z_0 que l'on déterminera.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation f(z) = 0. On notera z_1 et z_2 les deux autres solutions (où z_1 est la solution complexe dont la partie imaginaire est positive).

3) Représenter dans le plan complexe les points M_0 ; M_1 ; M_2 d'affixes respectives z_0 ; z_1 ; z_2. Montrer que le triangle $M_0M_1M_2$ est rectangle.

4) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = z_1$. On donnera les solutions sous forme algébrique et trigonométrique. En déduire les valeurs exactes de : $\cos\frac{\pi}{8}$; $\sin\frac{\pi}{8}$ et $\tan\frac{\pi}{8}$.

b) Calculer $(z_1)^{20}$.

****DEVOIR N°4****

EXERCICE 1 : (5 points)

Soient les nombres z et Z tels que $z \neq -3$ et $Z = \dfrac{z+1-i}{z+3}$.

On désigne par A, B et M les points d'affixes respectives – 3 ;–1+i et z.
Déterminer et construire :

a) L'ensemble E_1 des points M tels que $|Z| = 1$
b) L'ensemble E_2 des points M tels que Z soit un réel négatif
c) L'ensemble E_2 des points M tels que Z soit imaginaire pure.

EXERCICE 2 : (5 points)

Déterminer les racines cubiques du nombre complexe i sous forme trigonométrique et algébrique.
En déduire la résolution dans de l'équation : $[(1-2i)z]^3 - i = 0$

EXERCICE 3 : (5 points)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^6 + iz^3 = 0$.
Placer les points images de ces solutions dans le plan complexe $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).
2) Linéariser l'expression : $\cos^3 x \sin^2 x$.
3) Déterminer une forme trigonométrique du nombre complexe :

$$z=-3+3i$$

4) Soit z_0 le complexe d'image ponctuelle M_0 tel que $z = 3\sqrt{2}\, z_0$ et u l'affixe d'un point M du plan ; tel que les images ponctuelles de z_0 et u soient les sommets d'un triangle rectangle en M_0. Déterminer l'ensemble des nombres complexes u.

EXERCICE 4 : (5 points)

1) Soit k un réel positif non nul et un nombre complexe $z_k = k-1-2i$.
Calculer $|z_k|$ en fonction de k.
Déterminer k pour zk vérifie : $|z_k| - z_k = 1 + 2i$.
2) Soient u un nombre complexe et l'équation d'inconnue z :$|z| - z = u$.
a) Déterminer l'ensemble des valeurs de u telles que l'équation :
$|z|-z = u$ admette une solution ; puis résoudre cette équation dans $\mathbb{C}$.
b) Soit $u = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$; $r \in \mathbb{R}_+^*$; $\dfrac{-\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

Exprimer le module et l'argument de la solution de l'équation à l'aide de r et α.

3) Soient les complexes z et z' tels que :

$z = \cos 2\varphi + \sin 2\varphi$ et $z' = \cos 2\varphi' + \sin 2\varphi'$ avec $0 < \varphi < \pi$.

Calculer le module et l'argument du nombre complexe $u = \dfrac{1-z}{1-z'}$.

****DEVOIR N°5****

EXERCICE: (5 points)

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$. Soient A le point d'affixe −2 + 3i, B le point d'affixe 1−3i, M le point d'affixe z, (z ≠ −2 + 3i), M' le point d'affixe z' tel que z' = $2i\times\left(\dfrac{z-1+3i}{z+2-3i}\right)$

1) Déterminer l'ensemble (E) des points M tels que |z'|=2 ;

2) Déterminer et construire l'ensemble (F) des points M tels que z' soit un réel strictement négatif.

Problème : (15 points)

1) Déterminer les racines carrées δ_1 et δ_2 du complexe z=−18i ;

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 4iz - 4 + 18i = 0$;

3) Soit le système d'inconnue b, $\begin{cases} b^4 - 12b^2 + 56b - 288 = 0 \\ 4b^3 - 18b^2 + 24b - 64 = 0 \end{cases}$

Montrer que 4 est une solution de chacune des équations du système.

4) Soit $f(z)= z^4 - 4z^3 + 6(2+3i)z^2 + 8(3-7i)z - 288 - 64i$

Montrer que l'équation f(z)=0 admet une solution imaginaire pure note z_A et une solution réelle note z_B.

5) Déterminer les complexes a ; b et c tels que :

$$f(z) = [\, z^2 - (4+4i)z + 16i\,]\,[az^2 + bz + c]$$

En déduire la résolution de f(z)=0. On notera z_C la solution non réelle et non imaginaire pur dont $\mathcal{R}_e(z_C) > 0$; puis z_D la quatrième solution dont $\mathcal{R}_e(z_D) < 0$.

6) Placer dans le plan complexe les points A, B, C, D d'affixes respectives z_A ; z_B ; z_C et z_D puis calculer AB² ;AC² ;AD² ;BC² ;BD² ;CD².

7) Construire le barycentre G des points (A,1) ;(B,1) ;(C,1) ;(D,1).

8) Soit l'application f définie par f(M)=MA²+MB²+MC²+MD².

a) Déterminer et construire $(\Gamma_1) = \{M \in P \,/\, f(M) = 140\}$

b) Déterminer et construire $(\Gamma_2) = \{M \in P \,/\, f(M) = 108\}$

c) Quelle est la nature de l'ensemble ($\mathcal{A}$) des points M du plan tels que : $108 \le f(M) \le 140$.

9) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du polygone ABCD.

****DEVOIR N°6****

EXERCICE1: (10 points)

$\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes. Soit f la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = z^3 - (2+i)z^2 + 2(1+i)z - 2i$.

1) Calculer f(i) et en déduire une factorisation de f(z).

2) a) Résoudre dans, l'équation f(z)=0 ;
b) Calculer le module et l'argument de chaque solution de l'équation.

3) On désigne z_1 ; z_2 et z_3 les solutions de l'équation f(z)=0 ; z_2 étant celle d'argument $\frac{\pi}{2}$. Vérifier que : $-\frac{1}{2}Z_1Z_3 = Z_2$.

EXERCICE2: (10 points)

1) Linéariser : $\sin^6 x + \cos^6 x$.

2) Soit z et Z les nombres complexes définies par :

$$z = \sqrt{1+\sqrt{2}} + i\sqrt{\sqrt{2}-1} \qquad et \qquad Z = z^4$$

Déterminer les racines quatrième de Z sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique.

En déduire $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.

****DEVOIR N°7****

EXERCICE 1: (5 points)

Soit le nombre complexe z= $-4(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})$.

1) Ecrire z sous forme algébrique

2) a-/ L'écriture $z = -4(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})$ est-elle une forme trigonométrique ? justifier votre réponse.

b-/ Donner la forme trigonométrique de z utilisant l'argument principal.

EXERCICE 2: (5 points)

Soit f l'application de $\mathbb{C}$-$\{-5\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $f(z) = \frac{z+1+i}{z+5}$.

On désigne par A, B et M les points d'affixes respectives −5 ; −1−i ; z.

1- Donner une interprétation géométrique d'un argument de f(z).

2- Déterminer et construire :

a) L'ensemble (E_1) des points M tels que $|f(z)|=1$;

b) L'ensemble (E_2) des points M tels que f(z) soit un réel ;

c) L'ensemble (E_3) des points M tels que f(z) soit un imaginaire pur.

EXERCICE 3: (5 points)

Déterminer les solutions dans de l'équation : $z^4 = (1-i)^4$.

Construire les images dans le plan complexe.

EXERCICE 4: (5 points)

1- Linéariser l'expression : $\left[\cos^2(\frac{3}{2}\theta) - \sin^2(\frac{3}{2}\theta)\right] \times \cos 3\theta$

2- Déterminer le module et un argument du nombre complexe z tel que : z = (1+ cosx + cos2x) + i(sinx + sin2x)

**** DEVOIR N°8 ****

EXERCICE 1: (5 points)

1- Calculer le module et l'argument du nombre $U = \dfrac{1}{1+itg\theta}$

(on discutera suivant les valeurs de θ).

2- Linéariser : $\sin^3(2\theta)\cos^2(2\theta)$.

EXERCICE 2: (5 points)

Pour chaque réel $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, on défini l'application f_α de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par :
$f_\alpha(z)= z^2\cos^2\alpha -2z\cos\alpha +1+\sin^2\alpha$.
Dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.
On désigne par E l'ensemble des points M d'affixe z telle qu'il existe
$\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, vérifiant $f_\alpha(z)=0$.

1) a- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f_\alpha(z)=0$.
   b- Si le points M(z) appartient à E, que peut-on dire du point M' d'affixe $\bar{z}$?.

2) Pour fixé, on pose : $Z=\frac{1}{2}i\,(z'+z'')\cos\alpha$, où z' et z'' sont les solutions de l'équation $f_\alpha(z)=0$.
Déterminer les racines quatrièmes de Z et représenter les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

EXERCICE 3: (5 points)

Dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, soit M le point d'affixe z, on pose z = x+iy, $(x;y)\in\mathbb{R}^2$. Soit A le point d'affixe −3i et M' d'affixe z' avec z'=x+3iy.

1) Quelle condition doit vérifier z pour que l'on ait M≠A et M'≠B ?
2) Cette condition étant vérifiée, démontrer que :

$$\left[(AM)//(BM')\right] \Leftrightarrow \left[\frac{z-i}{z'+3i}\in IR_+^*\right]$$

En déduire l'ensemble(E) des points M tels que (AM)//(BM').

3) Déterminer l'ensemble (F) des points M tels B, M et le point d'affixe iz soient alignés.

EXERCICE 4: (5 points)

Soit le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}\ ; \vec{j}\ )$. On donne les points A(1 ;5) ; B(2 ;3) et C(4 ;4).

1) Déterminer le barycentre G_α des points A, B, C affectés respectivement des coefficients : 1 ; 1+ α ; 3−α , avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

2) Déterminer α pour que G_α soit le point D(1 ;3).

3) Déterminer l'ensemble des points G_α quand $\boldsymbol{\alpha}$ décrit $\mathbb{R}$.

4) On prend α =5. Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant : $MA^2 + 6MB^2 - 2MC^2 = 40$. Représenter cet ensemble.

EXERCICE 5: (5 points)

Soit ABCD un carré. Déterminer un triplet de nombres réels (α ;β ;γ) tel que A soit le barycentre du système (B, β) ; (C, α) ; (D, γ).
Déterminer ensuite l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\overrightarrow{MB} \bullet \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \bullet \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC}^2 = 0$$

****DEVOIR N°9****

EXERCICE 1: (5 points)

A/- Soit le polynôme $f(x)=2x^3-10x^2-25x-21$.

1) Calculer f(7) et en déduire que : $f(x)=(x-7)(ax^2+bx+c)$ où a, b, c sont trois réels à déterminer.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation f(x)=0.

B/- Un entier naturel N, s'écrit : $\overline{5531}$ dans le système de numération de base n et $\overline{3676}$ en base (n+1). Calculer n et donner l'écriture de N dans le système décimal.

EXERCICE 2: (5 points)

Soit A ;B ;C trois point du plan P tels que AB=AC=5 et BC=6

1) Construire le triangle ABC et calculer $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$;
2) Soit G barycentre de (A,2) ; (B,3) ; (C,3).
   construire G et calculer GA.
3) Soit f : $\mathscr{P} \to \mathbb{R}$

   $M \mapsto f(M) = 2(\overrightarrow{MB} \bullet \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{MC} \bullet \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB})$

   a) Exprimer f(M) en fonction de f(G) et MG.
   b) Caculer f(A) et f(G).
   c) Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M tels que : f(M)=f(A).

Problème : (10 points)

Soit le polynôme P de la variable complexe z défini par :

$$P(z)=z^3-(7+9i)z^2+(39i-14)z+50$$

1) Montrer P(z)=0 admet une racine z_0 imaginaire pure.
2) Résoudre l'équation P(z)=0. On notera z_1 la racine non imaginaire pure ayant la plus petite partie réelle ; et z_2 la troisième racine.
3) Dans le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A, B , C d'affixes respectives z_0 ; z_1 ; z_2. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

$$MA^2-MB^2+MC^2=4.$$

****DEVOIR N°10****

EXERCICE 1: (4 points)

1/- Démontrer que ∀ x ∈ ℝ $\cos^5 x = \frac{1}{16}\left(\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x\right)$

2/- Résoudre dans ℝ cos2x − sin2x + 1 =0.

EXERCICE 2: (8 points)

On considère l'application de ℂ dans ℂ définie par :

$$f(z) = z^2 - (9+2i)z + 26$$

1/- Résoudre dans ℂ l'équation f(z)=0. On notera z_1 la solution de f(z)=0 qui a la plus grande partie réelle et z_2 l'autre racine.

2/- Soit A et B les points d'affixes respectives z_1 et z_2.
Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $\frac{MA}{MB} = 2.$

3/- On pose z=x+iy. Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe tels que f(z) soit un réel. Préciser sa nature.

EXERCICE 3: (8 points)

Dans le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A, B, C d'affixes respectifs :

$$z_A = 2-2\sqrt{3}i \ ; \ z_B = 2+2\sqrt{3}i \ ; \ z_C = 8.$$

1/- Ecrire z_A ; z_B ; z_C sous la forme trigonométrique. Placer les points A, B et C.

2/- Déterminer les coordonnées du barycentre G du système de points pondérés $\{(A, |z_A|) ;(B, |z_B|) ; ;(C, |z_C|)\}$ puis placer G.

3/- Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que : $\left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \right\| = \left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} \right\|$.

****DEVOIR N°11****

EXERCICE 1: (4 points)

Démontrer par récurrence que :

1- $\forall$ n$\in$ $\mathbb{N}$, $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.

2- $\forall$ n$\in$ $\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+.........+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

EXERCICE 2: (4 points)

1/ Déterminer le nombre entier du système décimal qui s'écrit :

$$\overline{abc}^{7} \quad et \quad \overline{cba}^{9}$$

2/ Résoudre dans $(Z/7Z)^2$ le système suivant : $\begin{cases} \dot{3}x\dot{+}\dot{3}y=\dot{3} \\ \dot{2}x+y=\dot{5} \end{cases}$

EXERCICE 3: (4 points)

1/ En utilisant l'algorithme d'Euclide déterminer : $354 \wedge 25$, et trouver deux entiers relatifs k et ℓ tels que : $354k + 25\ell = 1$.

2/ Résoudre dans $(\mathbb{N}^*)^2$: $(x\vee y) - 9(x\wedge y) = 13$.

EXERCICE 4 : (4 points)

1/ Déterminer l'ensemble des couples (x ;y) d'entiers naturels non nuls tels que : $\begin{cases} x\wedge y=7 \\ x\vee y=84 \end{cases}$

2/ a) Trouver l'ensemble des entiers naturels qui divisent 276.

b) Trouver les paires d'entiers naturels dont le plus grand commun diviseur d et le plus petit commun multiple m vérifient :

$$\begin{cases} m+3d=276 \\ 10 \prec d \prec 30 \end{cases}$$

EXERCICE 5: (4 points)

1/- Déterminer selon les valeurs de l'entier n, le reste de la division euclidienne par 9 de 4^n.

2/- En déduire que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, le nombre $N=22^{9n+2} - 31^{3n-1}$ est divisible par 9.

DEVOIR N°12

EXERCICE 1: (5 points)

1-/ Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul

$$2+6+12+........+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

2-/ Le Directeur du Lycée Technique de Bamako dispose 15 cahiers et 25 bics. A l'aide de ces fournitures, il veut faire des lots identiques pour récompenser les plus méritants de ses élèves.
a) Quel est le nombre maximum de lots qu'il peut former ?
b) On suppose qu'il peut former 5 lots et qu'il a en tout 40 objets (bics et cahiers). Le nombre de cahiers étant inférieur au nombre de bic, déterminer le nombre de cahiers et de bics.

EXERCICE 2: (5 points)

1/- Trouver l'entier N du système décimal qui s'écrit : $\overline{ab7}^{(9)}$ *et* $\overline{a7b}^{(8)}$
2/- a) Déterminer l'ensemble des diviseurs de 124.
b) Déterminer l'ensemble des couples (x ;y) de $(\mathbb{N}^*)^2$ tels que :
$\boldsymbol{d}$ = x ∧ y et $\boldsymbol{m}$ = x ∨ y vérifient la relation $\begin{cases} m-4d=124 \\ 3 \prec d \prec 50 \end{cases}$

EXERCICE 3: (5 points)

Soit N un entier naturel tel que en numération décimale, N s'écrive $\overline{abcd}$, et que l'entier qui s'écrit $\overline{bcda}$ soit divisible par 7.
1-/ Montrer que si a=7 alors $\overline{bcda}-10N$ soit divisible par 7.
En déduire que pour cette valeur de a, N est divisible par 7.
2-/ Montrer que 10N−3a est multiple de 7.
En déduire que si N est divisible par 7, alors a=7.

EXERCICE 4: (5 points)

La lettre a désigne un nombre réel strictement positif, on considère un triangle ABC tel que AB=3a ; AC=4a ; BC=5a.
1°) Déterminer le barycentre G des points (B,4) ;(C,3) ;(A,−5).
2°) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que l'on ait :

$$4MB^2+3MC^2-5MA^2=12a^2.$$

DEVOIR N°13

EXERCICE 1: (5 points)

Démontrer par récurrence que :

1) $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$: $1+3+5+\ldots\ldots+(2n+1) = (n+1)^2$.

2) $\forall\ n \in \mathbb{N}$: $A_n = 3^{2n+2} - 2^{n+1}$ est divisible par 7.

EXERCICE 2: (5 points)

1) Résoudre dans l'anneau $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ l'équation : $x^2 + \dot{3}x + \dot{2} = \dot{0}$

2) Résoudre dans l'anneau $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ le système suivant

$$\begin{cases} \dot{3}x + \dot{2}y = \dot{1} \\ \dot{2}x + \dot{5}y = \dot{6} \end{cases}$$

EXERCICE 3: (5 points)

Trouver le reste de la division par 13 du nombre N= 100^{1000}.

EXERCICE 4: (5 points)

1) Trouver l'écriture décimale des nombres suivants :

$$\overline{1A}^{16} \;;\; \overline{FF0}^{16} \;;\; \overline{1110}^{2} \;;\; \overline{1010100}^{2}$$

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ les équations suivantes

$$\dot{3}x = \dot{4} \;; \qquad x^2 + x = \dot{0} \;; \qquad x^3 = \dot{0}$$

****DEVOIR N°14****

EXERCICE 1: (10 points)

1) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, l'entier $n^2(n^2-1)$ est divisible 12.

2) a) Etudier les restes de la division par 7 des nombres 2^n et 3^n $n \in \mathbb{N}$.

b) Déterminer t, entier positif tel que : $2^t + 3^t \equiv 0\ [7]$.

3) a) Montrer que $\forall \in \mathbb{R}$ $x^4 + 3x^2 + 4 = (x^2 + 2)^2 - x^2$. Mettre le polynôme $P(x) = x^4 + 3x^2 + 4$, sous la forme d'un produit de facteurs du second degré.

b) Déduire de ce qui précède que si la base du système de numération est supérieure ou égale à cinq, le nombre 10304 est divisible 112. La base étant sept, exprimer le quotient de la division de 10304 par 112.

EXERCICE 2: (5 points)

Soit (a ;b ;c) un triplet d'entiers naturels tels que :

$a = \overline{111}^{(n)}$; $b = \overline{114}^{(n)}$; $c = \overline{13054}^{(n)}$

a) Sachant que c=ab, déterminer la base n puis les écritures des nombres a, b, c dans le système décimal.

b) Vérifier, en utilisant l'algorithme d'Euclide que a et b sont étrangers.

c) En déduire les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation ax + by = 1.

d) Résoudre $x \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$: $x^2 + x + \dot{1} = \dot{0}$.

$(x\ ;y) \in (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$; $\begin{cases} \dot{2}x - y - \dot{2} = \dot{0} \\ \dot{3}x + \dot{2}y - \dot{1} = \dot{0} \end{cases}$

EXERCICE 3: (5 points)

Soit $(a,b) \in \mathbb{N}$, on pose : $\mu = a \vee b$ et $\delta = a \wedge b$.

Déterminer tous les couples (a ;b) d'entiers naturels tels que :

a) $\mu - 9\delta = 13$

b) $\begin{cases} a + b = 96 \\ \mu = 180 \end{cases}$

DEVOIR N°15

EXERCICE 1 : (6 points)

1) a) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division par 7 de 4^n et de $A = 851^{3n} + 851^{2n} + 851^n + 2$

b) Un nombre B du système de numération de base 4 s'écrit : $B=\overline{2103211}$. Déterminer dans le système décimal le reste de la division de B par 7.

2) a) Trouver tous les couples (a, b) d'entiers naturels tels que :

$$\begin{cases} p\gcd(a,b)=42 \\ ppmc(a,b)=1680 \end{cases}$$

b) Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x tel que $8x \equiv 7[5]$

c) Résoudre dans   l'équation 336x + 210y = 294.

EXERCICE 2 : (4 points)

On considère la famille de fonctions numériques f_m définie par :

$$f_m(x) = \frac{(m-2)x^2 + 3x - 5}{x+1}$$ où m est un paramètre réel.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$ on désigne par $(\mathcal{C}_m)$ la courbe de f_m.

1) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_m$ de f_m.

2) Discuter suivant les valeurs de m, les limites de f_m aux bornes de $\mathcal{D}_m$.

3) Montrer que toutes les courbes $(\mathcal{C}_m)$ de f_m passent par un point fixe A dont on précisera les coordonnées.

Problème : (10 points)

A] Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $f(z)=z^3-(1+i)z^2-4+4i$.

1) Vérifier que l'équation f(z)=0 admet une solution réelle z_1 et un solution imaginaire pure z_2 que l'on déterminera.

2) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation f(z)=0 ;

b) Calculer le module et l'argument principal des trois solutions de l'équation f(z)=0. On désignera par z_3 la troisième solution.

4) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé , on désigne par M_1 ; M_2 ; M_3 les points d'affixes z_1 ; z_2 ; z_3.

Placer ces points. Préciser la nature du triangle $M_1M_2M_3$.

B] On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation : $mz^2 - (m^2+4)z + 4m = 0$ (1) où m est un paramètre complexe.

1) Résoudre l'équation (1) pour $m=1+i$.

En désignant par z_1 et z_2 les solutions obtenues ; montrer que : $z_2 = \frac{4}{z_1}$.

Pouvait-on prévoir ce résultat ?.

2) Donner la forme générale des solutions de l'équation (1) dans $\mathbb{C}$.

3) On se place dans le cas où les deux solutions de l'équation (1) sont des nombres complexes conjugués. Déterminer leur module.

4) Montrer que si l'équation $z^2-Sz+4=0$ admet deux solutions conjuguées, alors S est un réel vérifiant ; $-4 \leq S \leq 4$.

5) Calculer les solutions z_0 et $\overline{Z_0}$ lorsque $S=-2$.

Donner leur forme trigonométrique. Représenter les solutions dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$.

6) Calculer z_0^5 et $\overline{Z_0}^5$ puis montrer que : $\frac{Z_0^{\,5}}{16} = \overline{Z_0}$ *et* $\frac{\overline{Z_0}^5}{16} = Z_0$.

DEVOIR N°16

EXERCICE 1 : (10 points)

Soient A ; B ; C trois points du plan $\mathscr{P}$ tels que AB=AC=5 ; BC=6.

1) Construire le triangle ABC et calculer $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$

2) Soit G le barycentre de (A,2) ; (B,3) ;(C,3).
Construire G et calculer GA.

3) Soit f l'application de $\mathscr{P} \to \mathbb{R}$

M$\mapsto$ f(M)= $2\overrightarrow{MB} \bullet \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \bullet \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB}$

a) Exprimer f(M) en fonction de f(G) et MG.
b) Calculer f(A) et f(G).
c) Déterminer et construire l'ensemble E des points tels que f(M)=f(A).

EXERCICE 2 : (10 points)

1) Vérifier que pour tout réel x : $x^2 - 1 = \dfrac{(2x-1)(2x+1)-3}{4}$.

En déduire $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos^3 x}{1-2\sin x} dx$.

2) On donne : $f(x) = \dfrac{1}{10} e^x \left(\dfrac{1}{x} + \ln 2x \right)$.

En remarquant que f=hk' + kh' calculer $\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx$.

3) Calculer $\int_0^{\pi} e^x \sin 3x \, dx$.

4) Soient $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos^2 x \, dx$ *et* $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin^2 x \, dx$

a) Calculer I+J.
b) Soit $f(x) = \dfrac{1}{4} e^{2x} (\cos 2x + \sin 2x)$.

Calculer f'(x). En déduire I–J. Calculer I et J.

DEVOIR N°17

EXERCICE 1: (5 points)

Linéariser $\sin^5 x$, puis calculer $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^5 x \, dx$.

EXERCICE 2: (5 points)

Soit le polynôme complexe P tel que :

$$P(z)=\sqrt{6}(z^4+1)-2(1+2i)(z^3-z)-2\sqrt{6}z^2$$

Calculer P(1) et P(−1) puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation P(z)=0.

EXERCICE 3: (10 points)

Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x)=\frac{x^2-5x+4}{x-2}$$

1) a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

b) Etudier la variation de f. Calculer f(1) et f(4).

c) Quelle est la limite de g(x)= f(x) −x +3 quand x tend vers $+\infty$; quand x tend vers $-\infty$. En déduire que la courbe représentative ($\mathcal{C}_f$) de f admet la droite (D) d'équation y=x−3 pour asymptote.

2) a) Quelles sont les coordonnées des points d'intersection de ($\mathcal{C}_f$) avec les axes de coordonnées ?
Déterminer une équation de la tangente à ($\mathcal{C}_f$) en chacun de ces points.
Construire ces tangentes dans le plan muni d'un repère orthonormé.

b) Construire la courbe représentative ($\mathcal{C}_f$) de f dans le même repère.

****DEVOIR N°18 ****

EXERCICE 1: (5 points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = |x - 1| - \frac{2}{x+1}$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

2°) Ecrire f(x) sans valeur absolue.

3°) Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

4°) La fonction f est-elle continue au point 1 ?

5°) La fonction f est-elle dérivable au point 1 ? Que peut-on dire ?

EXERCICE 2: (5 points)

Soit f une fonction dont le tableau de variation est le suivant

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
f '(x)		+	0	−	‖	−	0	+	
f (x)	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

La fonction f est de la forme $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$ où a ;b et c sont des réels.

1) Calculer f'(x) ;

2) Trouver les coefficients a, b, c en utilisant les donnés ci-dessus.

Problème: (10 points)

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=\dfrac{x(x+1)}{(x+2)^2}$ et soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,\right)$.

1) a/ Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
   b/ Calculer les limites de la fonction f aux bornes de $\mathcal{D}_f$.
 En déduire les asymptotes à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

2) Etudier les variations de f.

3) Quelles sont les coordonnées du point d'intersection A de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ avec la droite d'équation y=1.

4) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse x=0.
Déterminer la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à la droite (T).

5) Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et la droite (T).

6) Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x)=\dfrac{\left|x^2+x\right|}{(x+2)^2}$ et $(\mathcal{C}')$ sa courbe représentative dans le repère $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,\right)$.
   a/- Ecrire g(x) sans valeur absolue.
   b/- Sans étudier g(x), tracer sa courbe $(\mathcal{C}')$.

7) Soit h la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} h(x)=f(x) & si\ x\geq -1 \\ h(x)=2x+a & si\ x\prec -1 \end{cases}$

 a/- Pour quelle valeur de a h est-elle continue au point −1 ?

 b/- Pour cette valeur de a, étudier la dérivabilité de h au point −1.

****DEVOIR N°19****

EXERCICE 1: (5 points)

Calculer les limites aux bornes du domaine de définition de chacune des fonctions suivantes définies ci-dessous :

$$f(x)=\frac{x+1}{x^2-3x} \quad ; \qquad g(x)=\sqrt{x^2+x-2}$$

EXERCICE 2: (5 points)

Calculer les limites suivantes :

a/- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3\sin^2 x}$; b/- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-2\sin^2 x}{1+\cos 4x}$; c/- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin x}$

Problème: (10 points)

Soit f_m la famille de fonctions définie par $f_m(x)=\frac{mx^2-1}{x^2-m}$ où m est un paramètre réel. On désigne par ($\mathcal{C}_m$) la courbe de f_m dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,)$.

1/ a- Donner, selon les valeurs de m, le domaine de définition de f_m.

b- Montrer que, pour toutes valeurs de m, f_m est paire.

c- Préciser selon les valeurs de m, sur quel ensemble f_m est dérivable. Calculer $f_m'(x)$ pour x élément de cet ensemble. Pour quelles valeurs de m, f_m est-elle constante sur son domaine de définition ?

2/ Pour m≠1, calculer $f_m(1)$; en déduire qu'il existe deux points appartenant à toutes les courbes ($\mathcal{C}_m$) sauf ($\mathcal{C}_1$).

3/ Tracer ($\mathcal{C}_1$).

4/ Etudier les variations de f_{-2} et tracer ($\mathcal{C}_{-2}$).

5/ Faire l'étude complète de f_4 et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé distinct du précédent.

****DEVOIR N°20****

EXERCICE 1: (4 points)

Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie de]2;+∞[sur ℝ par : $f(x)=\dfrac{2x^2-7x-9}{x-2}$.

1) Montrer que f admet une réciproque f^{-1}, que l'on définira.
2) Tracer les courbes de f et de f^{-1} dans un même repère orthonormé.

EXERCICE 2: (6 points)

Dans le plan affine euclidien E, on considère trois points A, B et C tels que : AB=4 ; AC=3 ; BC=5 (en cm).

1) Trouver l'ensemble des points M de E vérifiant : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}=\vec{v}$ ($\vec{v}$ étant un vecteur donné du plan vectoriel associé à E).
2) Le système $S=\{(A,1);(B,1);(C,-3)\}$a-t-il un barycentre ? si oui trouver le puis le construire.
3) Déterminer alors l'ensemble (H) des points M de E vérifiant :
$MA^2+MB^2-3MC^2=5$ puis construire (H).

EXERCICE 3: (6 points)

Soit E un espace affine rapporté au repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$. On considère l'application f de E dans E définie par :∀ M(x ;y ;z), f(M)=M'(x' ;y' ;z')

avec $\begin{cases} x'=3x-4z-6 \\ y'=2x-y-2z-4 \\ z'=2x-3z-6 \end{cases}$

1) Montrer que f est une application affine.
2) Quelle est la nature de f ? En déduire ses éléments caractéristiques.
3) Trouver l'image du plan P d'équation : x+y−z+3=0 par f.

EXERCICE 4: (4 points)

Soit f une fonction dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		-2		$\frac{5}{2}$		4		5		$+\infty$
f'(x)		+	|	+	0	−	||	+	|	+	
f (x)	$-\infty$	↗	0	↗	**1**	↘	$-\infty$ || $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

Tracer la courbe ($\mathcal{C}_f$) de f sachant que la droite d'équation $y=\frac{1}{3}x+1$ est une asymptote à ($\mathcal{C}_f$).

****DEVOIR N°21****

EXERCICES: (8 points)

1) Calculer $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$

2) Soit $J = \int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x} dx$

a-/ En intégrant par parties, montrer que $J = \frac{1}{200\pi} - \int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\cos x}{x^2} dx$;

b-/ En déduire que $0 \leq J \leq \frac{1}{100\pi}$

3) a-/ Soit la fonction numérique f :

$$f :]1 ;+\infty[\to IR \quad qui\ à \quad x \mapsto \quad f(x) = \frac{2x}{(x^2-1)^2} \quad .$$

Calculer $F(x) = \int_2^x f(t)dt$ pour x >1.

b-/ Soit la fonction numérique g :

$$g :]1;+\infty[\to IR \quad qui \quad à \quad x \mapsto g(x) = \frac{1}{x(x^2-1)}.$$

Trouver les réels a ; b ; c tels que : $g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}$.

Calculer $G(x) = \int_2^x g(t)dt$ pour x > 1.

c-/ Calculer $H(x) = \int_2^x \frac{t \ln t}{(t^2-1)^2} dt$ pour x >1.

d-/ Déterminer $\lim_{x \to +\infty} H(x)$, (on pourra écrire que pour x >1 :

$\ln(x^2-1) = 2\ln x + \ln(1 - \frac{1}{x^2})$).

Problème: (12 points)

1) Soit f la fonction définie par $f(x)=x\ln x - x$ pour $x > 0$ et $f(0)=0$.
Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}+$. Etudier f et tracer sa courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé d'unité 1cm.

2) Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{3}{4}x^2$ pour $x > 0$ et $g(0)=a$.

Quelle valeur faut-il donner à a pour que g soit continue en $x_0=0$?
a-/ Etudier la dérivabilité de g en $x_0=0$.
b-/ Etudier g et tracer sa courbe $(\mathcal{C}_g)$ dans le même repère que $(\mathcal{C}_f)$.
3) Déterminer en cm^2, l'aire du domaine limité par l'axe des abscisses, la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et les droites d'équations : x=1 et x=e.
4) Après avoir dérivé la fonction h définie par $h(x)=x^3\ln x$, déterminer une primitive de g et l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ du domaine :

$\mathcal{D}_\alpha = \{ M(x ;y) / \alpha \leq x \leq e\sqrt{e}$ et $0 \leq -y \leq -g(x)\}$ où α est un paramètre réel positif inférieur à $e\sqrt{e}$. Déterminer s'il existe $\lim_{\alpha \to 0^+} A(\alpha)$.

DEVOIR N°22

EXERCICE 1: (12 points)

Soit la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$f(x)=\frac{x^4+12x^3+40x^2+24x-44}{(x+3)^2}$$

1) Déterminer les réels a ; b ; c ; d tels que pour tout x de l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f : $f(x)=ax^2+bx+c+\dfrac{d}{(x+3)^2}$

2) Etudier les variations de la fonction f ;
3) Montrer que la parabole (P) d'équation $y=x^2+6x-5$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f.
4) Etudier la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (P).
5) Tracer (P) et $(\mathcal{C}_f)$.
6) Trouver une primitive de f sur $\mathcal{D}_f$.
7) Calculer $A=\int_0^{-2} f(x)dx$.

EXERCICE 2: (8 points)

Soit f définie par $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$ et soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1) Etudier la fonction f ;

2) Etudier la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à son asymptote oblique (Δ)
3) Montrer que $\forall$ x $\in$ [1,2] on a $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$.

4) En déduire qu'en appliquant l'inégalité des accroissements finis à [x,2] on a : $1+\frac{3}{4}x \geq f(x)$.

5) Montrer que la restriction g de f à $[1,+\infty[$ réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur un intervalle de $\mathbb{R}$ que l'on précisera.

DEVOIR N°23

I) Soit f la fonction définie par $f(0)=1$ et $f(x)=-2x+1+x\ln x$.
1) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.
2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f au point 0.
3) a) Calculer $f'(x)$ si $x \geq 0$.
   b) Etudier les variations de f et la limite de f en $+\infty$
4) Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$?
5) Etudier $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Déduisez-en le comportement asymptotique de la courbe représentative de f.

II) A)-On considère la fonction numérique g définie par $g(x)=e^x+x-5$
1) Etudier le sens de variation de g (on ne demande pas de déterminer les limites de g, ni de construire sa courbe représentative).
2) Calculer g(0) et g(2). Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$ et une seule.
3) Justifier l'encadrement $1.30< \alpha <1.31$.

B)-Soit la fonction numérique f définie sur$]-\infty,5[$ par $f(x)=\ln(5-x)$.
1) Etudier le sens de variation de f.

Préciser les limites de f en $-\infty$ et en 5.

2) Vérifier l'égalité $f(\alpha)=\alpha$.
3) Montrer que, pour tout réel x de [0,3] on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

En déduire que pour tout réel x de [0,3] on : $|f(x)-\alpha| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|$.

4) a-/ Montrer que si $0 \leq x \leq 3$ alors $0 \leq f(x) \leq 3$.
b -/ On considère la suite (U_n) d'éléments de [0,3] en posant :
$U_0=1$ et $U_{n+1}=f(U_n)$ pour tout entier naturel n.

Montrer que pour tout entier naturel n on a $|U_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n-\alpha|$.

En déduire que $|U_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0-\alpha|$ et que $|U_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

c-/ Déterminer un entier naturel n_0 tel que :
Pour $n \geq n_0$ on a $|U_n-\alpha| \leq 10^{-3}$.

**** DEVOIR N°24 ****

EXERCICE 1: (5 points)

Démontrer que pour tout nombre réel x, on a la relation

$\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$

Trouver une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x)=\cos^3 x$.

EXERCICE 2: (5 points)

Soit la fonction f qui, à tout nombre réel x fait correspondre

$$f(x)=(x-3)\sqrt{x}$$

Construire dans un repère orthonormé la courbe de f.

Problème : (10 points)

On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation : $-z^3 + (4+i)z^2 + (8+6i)z + 4 + 28i = 0$.

1-/ Montrer que cette équation admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on précisera.

2-/ Trouver les nombres complexes α et β tels que l'équation puisse s'écrire : $(z - z_0)(-z^2 + \alpha z + \beta) = 0$.
Déduisez-en les autres solutions z_1 et z_2 de cette équation.
(on désignera par z_1 la solution dont la partie réelle est négative et z_2 la troisième solution).

3-/ On considère un plan $\mathscr{P}$ rapporté à un repère orthonormé. On désigne par A, B, C les points de $\mathscr{P}$ d'affixes respectives z_0 , z_1 , z_2.
Placer les points A, B, C et déduire la nature triangle ABC.

4-/ Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M(x ;y) du plan $\mathscr{P}$ tels que ; $MA^2 + MB^2 - MC^2 = 3$.

****DEVOIR N°25****

EXERCICE 1: (4 points)

Après avoir déterminer les ensembles de définition et de dérivabilité des fonctions ci-dessous, calculer les fonctions dérivées.

1-/ $f(x)=\left(\frac{2x-3}{1-x}\right)^3$;2-/ $f(x)=\frac{3(2+x^2)}{6+x^2}$;3-/ $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$;4-/ $f(x)=\cos^3 2x$.

EXERCICE 2: (4 points)

Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{2x+3}{(x-1)^3}$.

1-/ Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f et trouver les réels a et b tels que pour tout x de $\mathcal{D}_f$: $f(x)=\frac{a}{(x-1)^2}+\frac{b}{(x-1)^3}$.

2-/ Dresser le tableau de variation de f.

Problème : (12 points)

Pour tout entier n strictement positif on définit l'application f_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout x, associe : $f_n(x)=\frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}$. On désigne par $(\mathcal{C}_n)$ la courbe de f_n.

1-/ a) Calculer la fonction dérivée de f_n; en déduire que pour tout $n \geq 1$, f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

b) Dresser le tableau de variation de f_n suivant la parité de n.

c) Démontrer que toutes les courbes $(\mathcal{C}_n)$ passent par deux points fixes dont on déterminera les coordonnées.

2-/ Etudier et tracer la courbe de f_1.

DEVOIR N°26

EXERCICE 1: (5 points)

Trouver sept termes d'une suite géométrique : u_1 ; u_2 ; … ; u_7 tels que

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 2 \\ u_5 + u_6 + u_7 = 1250 \end{cases}$$

On montrera d'abord que : $\frac{u_5}{u_1} = \frac{u_5 + u_6 + u_7}{u_1 + u_2 + u_3}$.

EXERCICE 2: (5 points)

1-/ Résoudre l'équation différentielle : $3y'' + 48y = 0$

2-/ Déterminer la solution f de cette équation sachant que :

$$f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2 \text{ et } f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2.$$

EXERCICE 3: (5 points)

Soit la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t}$ pour $t \in [n\,;n+1]$; $n>0$.

1-/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a: $\frac{1}{n+1} \leq \int_{n^2}^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{n}$.

2-/ On considère la suite de terme général :

$$U_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n} - \ln n, \ n \geq 1.$$

Montrer que (U_n) est monotone, à termes positifs ; conclure.

EXERCICE 4: (5 points)

Soit la fonction f de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x-1}{x} e^{\frac{1}{x}} & si \quad x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1-/ Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f et étudier les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$. Etudier la continuité de f au point x=0.

2-/ Etudier les variations de f. Représenter graphiquement f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$.

DEVOIR N°27

<u>**EXERCICE 1**</u>: (5 points)

1-/ Démontrer que, quelque soit l'entier naturel n, on a :

$$3^{2n+3} + 2^{n+3} \equiv 0\ [7].$$

2-/ Résoudre dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, l'équation : $x^2 + \dot{2}x + \dot{6} = \dot{0}$.

3-/ Résoudre le système $(a\ ;b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ $\begin{cases} a^2 - b^2 = 405 \\ 3m = a \end{cases}$ avec $m = a \vee b$.

<u>**EXERCICE 2**</u>: (5 points)

L'objet de l'exercice est d'étudier la suite de terme général

$$U_n = \int_0^1 f_n(x)dx \qquad où \qquad f_n(x) = \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}.(on\ \ convient\ \ que\ \ x^0 = 1).$$

1-/ Calculer u_0 et u_1.

2-/ Comparer x^n à x^{n+1} lorsque $x \in [0\ ;1]$. En déduire que la suite (U_n) est décroissante.

3-/ En observant que $u_{n-1}+u_n = \int_0^1 x^{n-1}.\sqrt{1+x}\ dx$, établir que $u_{n-1}+u_n < \frac{\sqrt{2}}{n}$.

4-/ A l'aide des résultats précédents, établir que : $\frac{\sqrt{2}}{2(n+1)} \leq U_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2n}$.

En déduire la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

<u>**Problème**</u> : (10 points)

1-/ Soit la fonction g définie sur$]0\ ;+\infty[$ par $g(x)=-x^2+1-\ln x$.

a/ Etudier les variations de g. Préciser les limites de g en 0 et $+\infty$.

b/ Déterminer le signe de g(x) suivant les valeurs de x. Calculer g(1).

2-/ Soit la fonction f définie sur$]0\ ;+\infty[$ par : $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{\ln x}{2x}$.

a/ Etudier les variations de f, puis dresser son tableau de variation.

b/ Démontrer que f(x)=0 admet deux solutions α et β, ($\alpha < \beta$).

c/ on désigne par (Δ) la droite d'équation : $y = -\frac{1}{2}x+1$ et ($\mathcal{C}_f$) la courbe représentative de f. Etudier le signe de $d(x) = f(x) - (-\frac{1}{2}x+1)$ et en déduire la position de ($\mathcal{C}_f$) par rapport à (Δ).

d/ Démontrer que (Δ) est asymptote à la courbe ($\mathcal{C}_f$).Tracer (Δ)et ($\mathcal{C}_f$).

****DEVOIR N°28-**ESS-2004******

EXERCICE 1: (7 points)

On considère la suite (U_n) de nombres réels définie par : $U_0=2$ et pour tout entier naturel n, $\ln (U_{n+1}) = 1 + \ln (U_n)$.

1-/ Calculer u_1 ; u_2 ; u_3 .

2-/ Montrer que $\frac{U_{n+1}}{U_n} = e$.

3-/ Exprimer U_n en fonction de n.

4-/ Préciser le sens de variation de la suite (U_n).

EXERCICE 2: (7 points)

1-/ a/ Calculer le module et l'argument du nombre complexe :

$$z_n=(1+i)^n,\ n\in \mathbb{N}.$$

b/ Pour quelles valeurs de n, z_n est-il un nombre réel ?

2-/ Dans le plan complexe, on désigne par A_n le point d'affixe z_n.

a/ Déterminer les nombres réels α et β tels que le barycentre des points A_1, A_2, A_3 et A_4 affectés des coefficients α, β, 1 et 1 soit le point d'affixe nulle.

b/ x étant un nombre réel, calculer en fonction de x le module du complexe $z=e^{-x} + ixe^{-x}$.

EXERCICE 3: (6 points)

1-/ Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation: $6x-13y=5$.

2-/ Une variable aléatoire x ne prend que les valeurs : -1 ; 1 et 2 avec les probabilités respectives. $A=\frac{x}{5}$; $B=\frac{3x-8y}{5}$; $C=\frac{2x-5y}{5}$.

a/ Montrer qu'il existe un couple unique (x ;y) d'entiers tel que ces données soient acceptables.

b/ Calculer alors l'espérance et la variance de x.

****DEVOIR N°29****

EXERCICE 1: (2 points)

On considère la suite (I_n) : $n \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{4}} nx^n \cos 2x \, dx$.

Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $0 \leq I_n \leq \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}$.

En déduire que (I_n) converge.

EXERCICE 2: (6 points)

On considère la suite (U) de premier terme $U_0=0$ et définie pour tout entier positif par la relation de récurrence : $U_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+U_n}$.

1-/ a/ Montrer que pour tout $n \geq 1$; $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq U_n \leq 1$.

b/ Etudier le sens de variation de la suite (U) et en déduire que la suite est convergente.

c/ Déterminer la limite ℓ de la suite (U).

2-/ a/ Montrer que pour tout nombre réel x de $[0 ; \pi]$ on a :

$$\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \cos(\frac{x}{2}).$$

b/ Montrer alors que pour tout entier naturel n : $U_n=\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$.

c/ Retrouver ainsi la limite ℓ de la suite (U).

Problème : (12 points)

A] Soit $(\mathcal{E})$ l'équation différentielle du second ordre : $y''-3y'+2y=0$.

1-/ a/ Quelles sont les solutions de $(\mathcal{E})$.

b/ Quelle est la solution de , dont la courbe représentative $(\mathcal{C})$ admet au point d'abscisse 0, la même tangente que la courbe $(\mathcal{C}')$ représentative de $y=e^{3x}$?. On dit que $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ sont tangentes.

2-/ Représenter dans un même repère orthonormé les courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ dont on précisera les positions relatives.

3-/ α étant un nombre réel strictement positif, soit h_α les fonctions telles que : $h_\alpha(x) = -\alpha^2 e^x + 2\alpha e^{2x}$.
a/ Montrer h_α est solution de $(\mathcal{E})$.

b/ Soit $(\mathcal{C}_\alpha)$ la courbe représentative de h_α.

Après avoir calculé en fonction de α les coordonnées du point commun à $(\mathcal{C}_\alpha)$ et $(\mathcal{C}')$, montrer que ces courbes sont tangentes en ce point.

c/ Préciser les positions relatives de $(\mathcal{C}_\alpha)$ et $(\mathcal{C}')$.

B] Soit $(\mathcal{E}')$ l'équation différentielle du second ordre :

$$y''-3y'+2y=-x^2+x+2$$

1-/ Trouver trois nombres réels a ; b ; c pour que la fonction polynôme $t : x \mapsto ax^2 + bx + c$ solution de $(\mathcal{E}')$.

2-/ On pose : $f(x)=g(x)-\frac{1}{2}x^2-x$. Montrer que f est solution de $(\mathcal{E}')$ si et seulement si g est solution de $(\mathcal{E})$. En déduire l'ensemble des fonctions f, solution de $(\mathcal{E}')$.

3-/ Déterminer la solution de $(\mathcal{E}')$ dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées (0;2) et admet en ce point une tangente de coefficient directeur 1.

DEVOIR N°30

EXERCICE 1: (10 points)

On considère le nombre complexe $x = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

1-/ Mettre x sous la forme trigonométrique.

2-/ z étant un nombre complexe donné, on considère la suite (U_n) définie par : $U_1=z$ et $U_n= U_{n-1}.x$ pour $n \geq 2$.

a/ Calculer U_1 ; U_2 ; U_3 sachant que : $U_1.U_2.U_3 = 2(1-i)$ on prendra $\arg(z) \in [0 ; \frac{\pi}{2}]$.

b/ Montrer que U_1, U_2, U_3 forment une progression géométrique dont on déterminera la raison.

c/ Montrer que les arguments de U_1, U_2, U_3 forme un progression arithmétique dont on déterminera la raison.

EXERCICE 2: (10 points)

Soit la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$f(x) = 2x+1+\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$$

1-/ Etudier les limites de cette fonction aux bornes de son domaine de définition. On appelle $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.
Préciser les asymptotes de $(\mathcal{C}_f)$ en particulier, on établira l'existence d'une asymptote oblique $(\mathcal{D})$.

2-/ Etudier le sens de variation de f et indiquer pour tout x de son domaine de définition la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à $(\mathcal{D})$.

3-/ Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

DEVOIR N°31

EXERCICE 1: (8 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et système d'équations suivants

1-/ $3^{2x+2}+26\times3^{x}-3 = 0$; 2/ $(\ln x)^2-7\ln x+6=0$

3/ $\ln(x-3)+\ln(x-1)=3\ln 2$; 4/ $\begin{cases} 2\ln x - 3\ln y = 9 \\ \ln x + 5\ln y = -2 \end{cases}$

EXERCICE 2: (12 points)

On considère la fonction f définie par :$f(x)=(-x^2+2x-1)e^{-x}$.

1-/ Etudier la fonction f.

2-/ Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f dans le plan muni d'un repère orthormé (unité graphique=2cm).

3-/ On considère la fonction F définie par : $F(x)= (ax^2+bx+c)e^{-x}$.

a/ Déterminer les réels a,b, c pour que F soit une primitive de f.

b/ En déduire l'aire A, en cm^2 de la partie du plan limitée par des abscisses, la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et les droites d'équations : x=0 et x=3.

NB : On prendra $e^3=20$; $e^{-3}=\frac{1}{e^3}=\frac{1}{20}$; $e^2=7$.

****DEVOIR N°32****

EXERCICE : (6 points)

1-/ Déterminer deux nombres réels a et b tels que, pour tout réel t ($t \in \mathbb{R}-\{-1\ ;0\}$) on ait : $\frac{1}{t(t+1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t+1}$.

Calculer alors : $\int_1^2 \frac{dt}{t\ (t+1)}$.

2-/ Calculer : $\int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt$ *et* $\int_1^2 \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt$.

3-/ Calculer : $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \sin^3 x\ dx$.

Problème : (14 points)

Etant donné un réel m, on considère l'application f_m : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui à x associe $f_m(x) = (1-mx)e^{x+1}$.

1-/ Suivant les valeurs de m, dresser le tableau de variation de f_m.

2-/ Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$g(x) = (1-x)e^{x+1}.$$

On désigne par $(\mathcal{C}_g)$ la courbe de g dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$.

a/Dresser le tableau de variation de g ;

b/Ecrire l'équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_g)$ en son point $x_0=-1$.

c/ Déterminer la fonction dérivée seconde g'' de g et étudier le signe de g''(x).

d/ Construire (T) et $(\mathcal{C}_g)$ dans le même repère.

3-/ a/ En utilisant une intégration par parties, déterminer sur $\mathbb{R}$ la primitive de g, qui s'annule pour $x=-1$.

b/ Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par $(\mathcal{C}_g)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=-1$ et $x= 1,5$.

4-/ Soit h la restriction de g à l'intervalle $I=]0\ ;+\infty[$.

a/ Montrer que h est une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.

b/ On note h^{-1} l'application réciproque de h. Calculer le nombre dérivée de h^{-1} au point $x=0$.

5-/ Les coordonnées d'un point mobile M sont, à la date t et dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$, $x=-1+\ln t$ et $y=(2-\ln t)t$, avec t $[2\ ;+\infty[$.

a/ Déterminer la trajectoire de M.

b/ Déterminer les coordonnées du vecteur vitesse de M à la date t.

****DEVOIR N°33****

EXERCICE : (7 points)

Soit f : [0 ;1] → $\mathbb{R}$

x ↦ $f(x)=\dfrac{e^x}{x+2}$.

1-/ Déterminer les fonctions f′ et f″.
2-/ Donnez le tableau de variation de f.
3-/ Démontrer que pour tout x de [0 ;1] , $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$.
4-/ Etablir que, l'équation f(x)=x admet une solution unique $\alpha \in [0\,;1]$.
5-/ Démontrer en utilisant l'inégalité des accroissements finis que :

$\forall\, x \in [0\,;1]$; $|f(x)-\alpha| \leq \frac{2}{3}|x-\alpha|$.

Problème : (13 points)

Soit f la fonction définie sur [0 ;+∞[par $f(x)=1-x+e^{-2x}+xe^{-2x}$.
On appelle $(\mathcal{C}_f)$ la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ d'unité graphique 2cm.
1-/ Calculer la fonction f′ dérivée de f. Dresser le tableau de variation de f′ sur [0 ;+∞[. En déduire le signe de f′ sur [0 ;+∞[.

2-/ Dresser le tableau des variations de f sur [0 ;+∞[.

3-/ Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique $(\mathcal{D})$ que l'on déterminera. Etudier la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à $(\mathcal{D})$.
4-/ Calculer le coefficient directeur de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ en $x_0=0$.
5-/ Etablir que l'équation f(x)=0 admet sur [0 ;+∞[une solution unique ℓ que l'on encadrera par deux entiers naturels consécutifs.

6-/ Construire $(\mathcal{D})$; (T) et $(\mathcal{C}_f)$ sur un même graphique.

7-/ Calculer en cm^2 l'aire A du domaine limité par $(\mathcal{C}_f)$ et les droites d'équations : y=1−x ; x=0 et x=1.

** DEVOIR N°34 **

EXERCICE 1: (5 points)

L'objectif est d'étudier la suite (U_n) définie pour tout entier $n \geq 0$ par :

$$U_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx \quad et, \quad pour \quad n \geq 1, \quad U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx.$$

1-/ a/ Soit f la fonction numérique définie sur [0 ;1] par :

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

Calculer f' de f. En déduire U_0.

b/ Calculer U_1.

2-/ a/ Prouver que la suite (U_n) est décroissante (on ne cherchera pas à calculer U_n).

b/ Montrer que pour tout nombre réel x ϵ [0 ;1] on a : $1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$.

En déduire que pour tout entier n ≥1, on a : $\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$.

Déterminer la limite de (U_n).

EXERCICE 2: (5 points)

1-/ a/ Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $3^{2n+1} + 2 \times 4^{3n+1}$ divisible par 11.

b/ Déterminer l'ensemble des entiers a tels que $3^{2n+1} + a \times 4^{3n+1}$ soit divisible par 11 pour tout entier n.

2-/ a/ Chercher le PGCD de 51366 et 2988 ;

b/ Soit l'équation$(x ;y) \in \mathbb{Z}^2$ (E) : 51966x+2988y=18.
Vérifier que le couple (23 ;–400) est solution de (E).

c/ Donner trois solutions particulières de (E).

3-/ a/ Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation 7x–4y=4

b/ Un entier naturel a s'écrit $\overline{75}^{x}$ *et* $\overline{49}^{y}$;

Un entier naturel b s'écrit $\overline{310}^{x}$ *et* $\overline{125}^{y}$. En utilisant les solutions de a/, déterminer x et y puis a et b.

Problème : (10 points)

A] Résolution de l'équation différentielle (E) :$y' - 2y = \frac{2}{1+e^{-2x}}$.

1-/ Déterminer la solution de l'équation y'–2y=0 qui prend la valeur 1 en 0.

2-/ Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que f(0)=ln2, et soit g la fonction définie par l'égalité : $f(x)=e^{2x}g(x)$.

a/ Calculer g(0) ;

b/ Calculer f'(x) en fonction de g'(x) et de g(x).

c/ Montrer que f est solution de (E) si, et seulement si : $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.

d/ En déduire l'expression de g(x), puis celle de f(x) de telle sorte que f soit solution de (E).

B] Etude sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par : $f(x)=e^{2x}\ln(1+e^{-2x})$.

1-/ On pose $h(x)=\ln(1+e^{-2x})-\dfrac{1}{e^{2x}+1}$.

a/ Etudier la limite de h en $+\infty$.
b/ Etudier le sens de variation de h.
c/ En déduire le signe de h(x), pour tout réel x.

2-/ Calculer f'(x) et montrer que f'(x) est du signe de h(x).

3-/ Etudier la limite de f en $+\infty$.
Montrer que $f(x)= e^{2x}[-2x+\ln(1+1e^{2x})]$.
En déduire la limite de f en $-\infty$ en admettant que $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0$.

4-/ Dresser le tableau de variation de f.

5-/ Préciser la tangente au point d'abscisse x=0.
Représenter graphiquement la courbe de f dans un repère orthonormal d'unité 5cm.

C] Calcul d'aire

1-/ En remarquant que $\dfrac{1}{1+e^{-2x}}=\dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$, déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+e^{-2x}}$.

2-/Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'aire en cm^2 de la portion de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe de la fonction f définie dans la partie B et les droites d'équations x=1 et x=0. On donnera la valeur exacte de cette aire ainsi qu'une valeur approchée à 10^{-3} près.

D] Etude d'une suite

On définit la suite (U_n) par $u_0=0$ et $U_{n+1}=f(U_n)$ pour tout $n\geq 0$
(où f est la fonction définie dans la partie B].)

1-/ Montrer que $f([0;1]) \subset [0;1]$ et en déduire par récurrence que, pour tout $n\geq 0$, que on a $U_n \in [0;1]$.

2-/ Montrer, que par récurrence, que la suite (U_n) est croissante.
En déduire qu'elle converge.

3-/ Soit α sa limite. Montrer que $f(\alpha)=\alpha$ et $\alpha \in [0;1]$.

4-/ Grâce à la représentation graphique de f, donner une valeur approchée α de.

****DEVOIR N°35****

Partie A]

On considère la fonction f de ℝ→ ℝ et définie par $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ et la fonction f_n pour $n\in\mathbb{N}^*$ est définie par $f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x}$.

1-/ Etant donné un réel x, on considère la somme $S_n(x)$ des n premiers termes de la suite géométrique de raison $(-x)$ et de premier terme 1.

a/ Montrer que pour tout $x\neq -1$, on a : $S_n(x)= f(x)-(-1)^n f_n(x)$.

b/ Montrer que si $|x|<1$, $S_n(x)$ admet une limite lorsque n tend vers l'infini. En est-il de même pour $x=1$?

2-/ Soit x un réel positif ou nul. On pose

$$\sigma_n(x)= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+..........+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}.$$

a/ Montrer, sans calculer l'intégrale $\int_0^x f_n(t)dt$ que :

$\sigma_n(x)+ (-1)^n \int_0^x f_n(t)dt - \ln(1+x)$ est une constante.

En déduire que pour tout x réel positif ou nul :

$$\ln(1+x)= \sigma_n(x)+ (-1)^n \int_0^x f_n(t)dt.$$

b/ Montrer que : si n est pair, on a $\sigma_n(x)\leq \ln(1+x)$.

si n est impair, on a $\sigma_n(x) \geq \ln(1+x)$.

c/ Donner en fonction de n et x, un majorant de la valeur absolue de l'erreur commise en remplaçant $\ln(1+x)$ par $\sigma_n(x)$. (on utilisera le fait que $\dfrac{1}{1+x}\leq 1 \quad si \;\; x\geq 0$).

d/ Calculer une valeur approchée à 10^{-5} près par défaut de $\ln\left(\dfrac{11}{10}\right)$.

Partie B] On considère que n=3.

1-/ a/ Etudier les variations de la fonction f_3.
b/ Montrer que la courbe de f_3 admet un point d'inflexion que l'on précisera.
2-/ Soit g la restriction de f_3 à l'intervalle $]-1,+\infty[$. Montrer que g est une bijection de $]-1,+\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera.
Dresser le tableau de variation de la bijection réciproque g^{-1}.

3-/ a/ Trouver les coordonnées des points d'intersection de la courbe $(\mathcal{C}_g)$ de g avec la droite d'équation y=x.

b/ Tracer dans le plan muni d'un repère orthonormé la courbe représentative de g puis celle de sa bijection réciproque g^{-1}.

c/ Trouver les équations des tangentes à la courbe de g^{-1} aux points d'abscisses 0 et $\frac{1}{2}$.

4-/ a/ Calculer $\int_0^x g(t)\,dt$.

b/ Pour $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, déterminer l'aire comprise entre les deux courbes.

Partie C]

Soit P le polynôme tel que, pour tout z complexe

$$P(z)= z^3 -(7+9i)z^2 -(14-39i)z + 50.$$

1-/ Montrer que l'équation P(z)=0, admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on calculera.

2-/ Résoudre alors P(z)=0, on note z_1 la solution non imaginaire pure ayant la plus petite partie réelle ; z_2 la troisième solution.

3-/ Soit A, B, C les points du plan euclidien d'affixes respectives z_0 ; z_1 ; z_2. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2-MB^2+MC^2=4$.

DEVOIR N°36

EXERCICE 1 : (5 points)

1-/ Pour tout entier naturel n, on pose : $U_n = \int_n^{n+1} (x+1)e^{-x}\,dx$.

a/ à l'aide d'une intégration par parties, calculer U_n en fonction de n.
b/ Etudier la convergence de la suite (U_n).

2-/ Pour tout entier naturel n, on pose : $S_n = \sum_{i=0}^{n} U_i$.

a/ Calculer S_n en fonction de n et trouver $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

b/ Calculer une valeur approchée de S_{10}.

Problème : (15 points)

Soit f la fonction définie sur]0;+∞[par : $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x^2}\ln x$.

On désigne par $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,\right)$ d'unité graphique 2cm.

Partie A :

1-/ Etudier le sens de variation de la fonction g définie sur]0;+∞[par $g(x) = -8\ln x + x^2 + 4$. (les limites de f ne sont pas demandées).
2-/ Montrer que g passe par un minimum dont on calculera la valeur. En déduire le signe de g(x).
3-/ Etudier le sens de variation de f.
4-/ Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Existe-t-il une asymptote à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ parallèle à un axe de coordonnées ?

Partie B :

Soit $(\mathscr{F})$ la courbe de la fonction ln dans le repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,\right)$ précédent.

Soit h la fonction définie sur]0;+∞[par $h(x) = f(x) - \ln x$.
1-/ Formuler explicitement h(x) et étudier son signe.
Qu'en déduire pour les courbes $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{F})$?

2-/ Quelle est la limite de h en +∞ ?
Qu'en déduire pour les courbes $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{F})$?

3-/ Construire les courbes $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{F})$ dans le repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,\right)$.

Partie C :

1-/ Soit α un réel strictement supérieur à 1.
Calculer, à l'aide d'une intégration par parties : $I(\alpha) = \int_0^{\alpha} h(x)\,dx$.

2-/ Montrer que, l'aire A(α) en cm^2 de la portion du plan limitée par les courbes $(\mathscr{C}_f)$;$(\mathscr{F})$ et les droites d'équations : x=1 et x=α est égale à A(α)=41α. Calculer la limite de A(α) quand α tend vers +∞.

****DEVOIR N°37****

Partie1

A) On considère la fonction polynôme p définie par p(x)= $x^2(x-1)-2(7x-12)$

1) Calculer p (2)
2) Résoudre $x \in IR$; p(x) = 0
3) En déduire les solutions de chacune des équations suivantes :

a) $e^{3x} - e^{2x} - 14e^{x} + 24 = 0$

b) $2\ln x + \ln(x-1) = \ln 2 + \ln(7x-12)$

c) $\dfrac{(\ln x)^3 + 24}{\ln x} = \ln x + 14$

B) Pour tout entier naturel, n, on pose $I_n = \int_1^2 x^n\left(\sqrt{2-x}\right)dx$

1) Calculer I_0
2) A l'aide d'une intégration par parties, déterminer I_1.
3) Etablir une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.

C) 1) Déterminer une fonction paire u et une fonction impaire v telles que :
$\forall x \in IR$; $u(x) + v(x) = e^x$

2) Montrer que u²–v² est une fonction constante. En déduire que $\dfrac{u}{v} = \dfrac{v'}{u'}$.

Partie2

Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par g(x) = $\dfrac{1}{x} - (3 + \ln x)$

1) dresser le tableau de variation de g
2) démontrer que l'équation g(x) = 0 admet une solution unique $\theta \in [0{,}45\ ;\ 0{,}46]$.
   En déduire le signe de g(x) sur $]0;+\infty[$
3) Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par f(x) = $e^{-x}(3 + \ln x)$ .On note $\mathcal{C}$ la courbe de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(0,\vec{i};\vec{j})$ d'unité graphique : 4cm

a) Etudier les limites de f aux bornes de $]0;+\infty[$

b) Montrer que $\forall x \in]0;+\infty[$ f '(x) = $e^{-x} \times g(x)$

c) Dresser le tableau de variation de f.

d) préciser les asymptotes.

e) Montrer que f (θ) = $\dfrac{e^{-\theta}}{\theta}$

e) Tracer la courbe $\mathcal{C}$ de f dans muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$,

4) a) Calculer $I = \int_{\frac{1}{4}}^{\theta}\left(\dfrac{1}{x} - (3 + \ln x)\right)dx$ en fonction de θ.

b) Que représente I ?

DEVOIR N°38

EXERCICE 1: (5 points)

Dans le plan P orienté on considère un carré ABCD tel que l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ a pour mesure $\frac{\pi}{2}$. On désigne par I et K les milieux respectifs des segments [AC] et [CD]. Représenter ces points sur une figure. (on choisira AB = AD = 4cm). On se propose d'étudier la similitude directe S telle que S(A) = I et S(C) = K.

1°) Recherche géométriques des éléments de S

a) Donner le rapport et l'angle de S.

b) Démontrer que le centre Ω de S est le point d'intersection autre que I des cercles de diamètre [AD] et [IC]. Placer ces cercles et Ω sur la figure.

2°) Recherche du centre de S à l'aide des nombres complexes.

Le plan est rapporté au repère orthonormal directe $\left(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$

a) Donner les affixes des points A , C , I et K.

b) Donner l'écriture complexe de S.

c) En déduire les coordonnées du point **Ω.**

EXERCICE 2: (5 points)

Soit P un plan orienté rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$. Soit f l'application affine de P dans P qui à tout point M(x ;y) associe le point M'(x' ;y') définie par

$$\begin{cases} x' = \sqrt{3}\;x + y - 3 \\ y' = x - \sqrt{3}\,y + 3 \end{cases}$$

1°) Soit z l'affixe de M ; z' l'affixe de M'. trouver une relation simple entre z' et $\bar{z}$.

Montrer qu'il existe un réel k tel que, quelque soit A et B dans P d'images A' et B' on ait : $\left\|\overrightarrow{A'B'}\right\| = k\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$. Déterminer k. Montrer que f n'est pas une similitude directe.

2°) Montrer que f a un point invariant Ω et un seul que l'on déterminera.

3°) Montrer qu'il existe une homothétie h de centre Ω et une droite D passant par Ω telles que : $f = h \circ S_D = S_D \circ h$ où S_D est la réflexion d'axe D.

Problème: (10 points)

On considère la fonction f définie sur]0 , 1[par $f(0)=0$; $f(1)=1$; $f(t)=\dfrac{t-1}{\ln t}$ $si\ t \in \left]0;1\right[$

On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$. Le but du problème est d'étudier f et calculer l'intégrale $I=\int_0^1 f(t)\,dt$.

A-/ Étude de *f*

1°) a) Montrer que f est continue en 0 et en 1.

b) Montrer que f est dérivable sur]0 ; 1[. Calculer $f'(t)$ et montrer que $f'(t)$ a le signe que $\varphi(t)$ où φ est la fonction définie sur]0 ; 1[par : $\varphi(t)=\ln t - 1 + \dfrac{1}{t}$

c) Étudier les variations puis le signe de φ ; en déduire le signe de $f'(t)$.

2°) Étudier la dérivabilité de f en 0 ; que peut-on en déduire pour la tangente à (C) au point d'abscisse x = 0 ?

3°) a) Prouver que, pour tout élément u de [0 ; $\frac{1}{2}$] : $0 \leq \frac{1}{1-u} - (1-u) \leq u^2$.

En déduire que : $0 \leq -\ln(1-u) - \left(u + \frac{u^2}{2}\right) \leq \frac{2u^2}{3}$.

b) Soit g la fonction définie sur]0 ;1[par : $g(x) = \frac{1}{f(x)}$

Prouver que pour tout élément h de [-$\frac{1}{2}$; 0] :

$$0 \leq g(1+h) - g(1) + \frac{h}{2} \leq \frac{2}{3}h^2$$

En déduire que g est dérivable en 1 et préciser g'(1).

c) En déduire que f est dérivable en 1 et prouver que : $f'(1) = \frac{1}{2}$.

4°) Tracer la courbe (C) (Unité graphique 10cm).

B-/ Calcul de l'intégral I

Pour tout élément x de]0 ; 1[, on pose : $I(x) = \int_x^1 f(t)\,dt \quad et \quad J(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{t}dt$

(On ne cherchera pas à calculer ces intégrales).

1°) Soit K la fonction définie sur]0 ; 1] par : $K(x) = J(x^2) - J(x)$

a) Montrer que K est dérivable sur]0 ;1] et que $K'(x) = \frac{1}{x}\left[f(x) - 2f(x^2)\right]$.

b) Prouver que pour tout élément x de]0 ;1], $f(x) - 2\,f(x^2) = -x\,f(x)$.

c) En déduire que pour tout élément x de]0 ;1[, $I(x) = \int_{x^2}^{x} \frac{t-1}{t\ln t}\,dt$ **(1).**

2°) Calculer la dérivée de la fonction $t \mapsto \ln(-\ln t)$ sur] 0;1[.

En déduire que pour tout élément x de]0;1[, $P = \int_{x^2}^{x} \frac{-1}{t\ln t}dt$ **(2).**

3°) Prouver que pour tout élément x de]0;1[et pour tout t de]0 ; x[:

$$0 \leq -\frac{1}{\ln t} \leq -\frac{1}{\ln x}.$$

En déduire que, pour tout élément x de]0;1[: $0 \leq \left|\int_{x^2}^{x} \frac{dt}{\ln t}\right| \leq -\frac{x}{\ln x}$ **(3)**.

4°) A partir des relations (1) ; (2) et (3), déterminer la limite de I(x) lorsque x tend vers 0

5°) Établir que pour tout élément x de]0 ;1] : $I - I(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

En déduire que : $0 \leq I - I(x) \leq x$.

6°) Prouver finalement que $I = \ln 2$