RAPPELS

1. LES ENSEMBLES DE NOMBRES

$\mathbb{N}$: est l'ensemble des entiers(ou nombres) naturels.

$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$

$\mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; \ldots\}$

$\mathbb{Z}$: est l'ensemble des entiers relatifs.

$\mathbb{Z}^*$: est l'ensemble des entiers relatifs privé de 0.

$\mathbb{Z} = \{\ldots;\ -2;\ -1; 0;\ +1;\ +2;\ +3; \ldots\}$

$\mathbb{Z}_+ = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}\ donc\ \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$

$\mathbb{Z}_- = \{0; -1; -2; -3; \ldots\}$

$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_+ \cup \mathbb{Z}_-$

$\mathbb{D}$: est l'ensemble des décimaux relatifs.

Un décimal est un nombre qui peut s'écrire sous la forme

$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{10^n}}$; $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}$ **et** $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$ (ou de la forme $a.10^p; a \in \mathbb{Z}\ et\ p \in \mathbb{Z}$.)

Exemple : 2,5 et $\frac{3}{4}$ sont des decimaux car :

$$\mathbf{2,5 = \frac{25}{10} = \frac{25}{10^1}};$$

$$\mathbf{\frac{3}{4} = 0,75 = \frac{75}{100} = \frac{75}{10^2}}$$

$\mathbb{Q}$: est l'ensemble des nombres rationnels.

Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme

$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$ avec $b \neq 0, a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$

Exemple : $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}; \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\ et\ \frac{\mathbf{17}}{\mathbf{16}}$ sont des exemples de rationnels

2. NOMBRES OPPOSES :

Deux nombres a et b sont opposés lorsque

$\boldsymbol{a = -b\ ou\ b = -a\ ou\ a + (-b) = 0}$

$\boldsymbol{Exemple}$: $2\ et\ -2\ sont\ opposés$

3. NOMBRES INVERSES :

Deux nombres a et b sont inverses l'un de l'autre lorsque

$$\mathbf{ab = 1\ ou\ a = \frac{1}{b}\ ou\ b = \frac{1}{a}}$$

$\boldsymbol{Exemple}$: $\frac{7}{9}$ et $\frac{9}{7}$ sont inverses de même que -5 et $-\frac{1}{5}$

4. SUITE D'OPERATIONS :

Dans une suite d'opérations, on effectue d'abord dans les parenthèses puis les puissances ensuite les multiplications et enfin les additions et les soustractions.

Exemple : Calculons l'expression

$E = 5 + (3\times2^2 + 1)^2 - 2\times3^2 + 4\times5$; $E = 5 + 169 - 18 + 20$

$E = 5 + (3\times4 + 1)^2 - 2\times9 + 4\times5$; $\mathbf{E = 176}$

$E = 5 + (12 + 1)^2 - 2\times9 + 4\times5$

5. FRACTIONS

$* \ \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{a\times k}}{\mathbf{b\times k}}$ **avec** $\mathbf{b \neq 0}$ **et** $\mathbf{k \neq 0}$

$\boldsymbol{Exemple}$: $\frac{66}{55} = \frac{6\times11}{5\times11} = \frac{6}{5}$

$* \ \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} + \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{a+c}}{\mathbf{b}}$; $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} - \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{a-c}}{\mathbf{b}}$ $\boldsymbol{avec\ b \neq 0}$

Si les fractions n'ont pas même dénominateur, on les réduit au même dénominateur.

Exemples :

$\frac{11}{16} + \frac{15}{16} = \frac{11+15}{16} = \frac{26}{16} = \frac{13}{8}$; $\frac{13}{5} - \frac{7}{5} = \frac{13-7}{5} = \frac{6}{5}$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $\frac{14}{16} - 2 = \frac{14}{16} - \frac{32}{16} = -\frac{18}{16} = -\frac{9}{8}$

$* \ \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \times \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} = \frac{\mathbf{a\times c}}{\mathbf{b\times d}}$ avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$

Exemples :

$\frac{8}{9} \times \frac{15}{14} = \frac{8\times15}{9\times14} = \frac{2\times4\times3\times5}{3\times3\times2\times7} = \frac{20}{21}$; $13 \times \frac{3}{8} = \frac{39}{8}$

$* \ \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \div \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \times \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{c}}$ ou $\frac{\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}}{\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \times \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{c}}$ avec $b \neq 0, d \neq 0$ et $c \neq 0$

Exemples :

$\frac{15}{16} \div \frac{5}{8} = \frac{15}{16} \times \frac{8}{5} = \frac{3}{2}$; $\frac{\frac{8}{9}}{\frac{14}{15}} = \frac{8}{9} \times \frac{15}{14} = \frac{20}{21}$

6. EQUATION DU 1ER DEGRE A UNE INCONNUE

Résous dans $\mathbb{Q}$ les équations

a) $9x - 7 = 3 - 3x + 8$; b) $x + 0,6 = 4,8$;

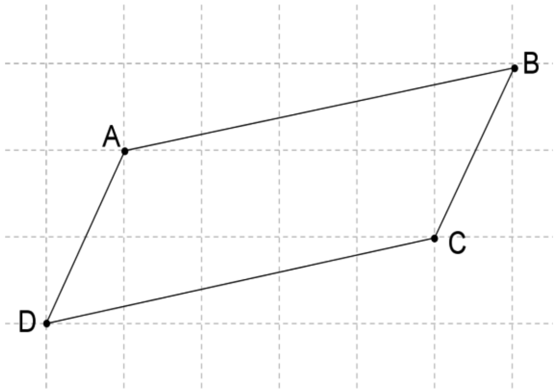
c) $2(3x - 1) - 2x = 7x + 3$;

$d)\ \frac{6(x-5}{14} - \frac{2(-3x+8)}{7} - \frac{x-4}{2} = 1$

7. VECTEUR

7.1. Bipoints équipollents

- Un bipoint est un couple de points on le note par exemple : **(A ; B)**. A est la première composante et B la deuxième composante.
- Deux bipoints (A ; B) et (D ; C) sont équipollents lorsque les points A, B, C, D forment un parallélogramme.



7.2. Définition d'un vecteur : Un vecteur est un ensemble de bipoints équipollents. On note par exemple $\overrightarrow{AB}$ *on lit vecteur* $\overrightarrow{AB}$

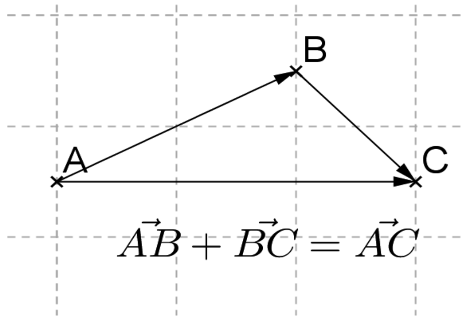
- Le point **A** est **l'origine** du vecteur $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}}$.
- Le point **B** est **l'extrémité** du vecteur $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}}$.

7.3. Vecteurs égaux : Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{DC}$ sont égaux lorsqu'ils ont :

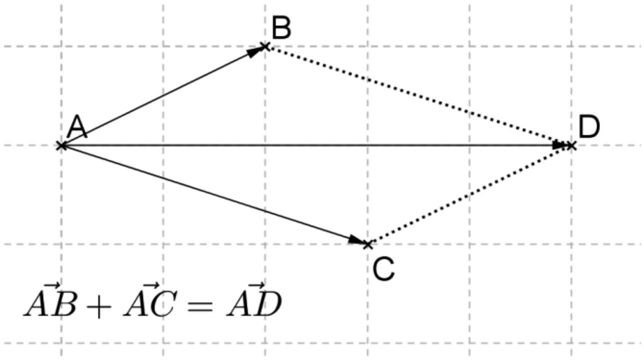
- **Même direction : (AB) // (CD) ;**
- **Même sens ;**
- **Même longueur.**

7.4. Somme de deux vecteurs

7.4.1. L'extrémité de l'un est l'origine de l'autre



7.4.2. Les deux vecteurs ont même origine (c'est la méthode du parallélogramme)

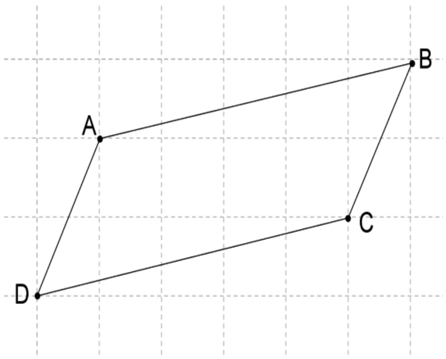


7.5. Vecteurs opposés – Vecteurs nuls

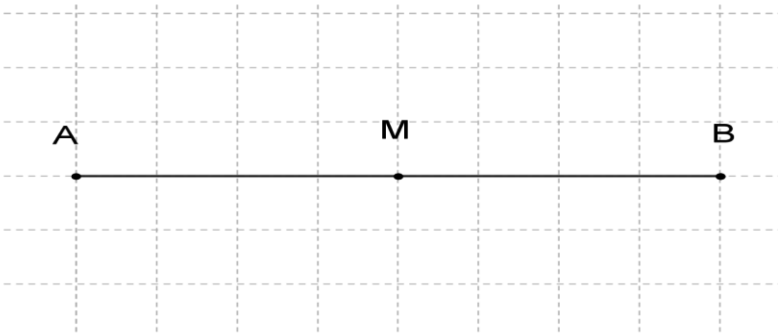
- Les vecteurs $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{BA}}$ ont même direction, même longueur mais de sens contraires, ils sont opposés.
  On note $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = -\overrightarrow{\boldsymbol{BA}}$ ***ou*** $\overrightarrow{\boldsymbol{BA}} = -\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$
- Les vecteurs $\overrightarrow{\boldsymbol{AA}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{BB}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{CC}}$, …sont des **vecteurs nuls.** Ils sont représentés par un symbole unique $\overrightarrow{\boldsymbol{O}}$
  $\overrightarrow{\boldsymbol{AA}} = \overrightarrow{\boldsymbol{BB}} = \overrightarrow{\boldsymbol{CC}} = \cdots = \overrightarrow{\boldsymbol{O}}$

7.6. Langage vectoriel langage géométrique

- Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ alors ABCD est un parallélogramme.
- Si ABCD est un parallélogramme alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.



- Si $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ alors M est le milieu [AB].
  Si M est le milieu [AB] alors $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$



EXERCICES

1) Calcule et donne le résultat sous forme de fraction irréductible :

$\frac{1}{3} + \frac{2}{7} - 3$; $\quad 1 - 3(\frac{1}{3} - 1)^2$; $\quad \frac{4}{7} - \left(\frac{2}{7} \times \frac{3}{4}\right)$; $\quad \left(\frac{1}{3} - 1\right) \div \left(-\frac{4}{9}\right)$;

$\dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{7} \times \dfrac{14}{9}$; $\quad -\dfrac{3}{14} + 2 \times \dfrac{1}{42}$; $\quad \dfrac{1 + \frac{1}{3}}{\frac{1}{4} - 2}$; $\dfrac{\frac{4}{3} - \frac{3}{2}}{1 - \frac{1}{3}}$

2) *On donne*: $a = \frac{3}{5}$ *et* $b = \frac{5}{4}$.
   Calcule : $a + b$; $a - b$; $\frac{a}{b}$; ab^2. On donnera les résultats sous la forme d'une fraction irréductible.

3) A, B, C sont trois points non alignés.

a) Construis le point E tel que : $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC}$

b) Les égalités suivantes sont-elles vraies ?

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE} \text{ ; } \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC} \text{ ; } \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CA} \text{ ; } \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{EB}$$

4) Soit un triangle ABC.
   Construis les points D, E, F tels que :
   $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BC}$

Démontre que C est le milieu de (D, F).

ALGEBRE

Racine carrée d'un réel positif

I. CARRE D'UN NOMBRE

Le carré d'un nombre **a** est le nombre multiplié par lui-même $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a}$.

On le note $\mathbf{a^2}$. On a : $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^2$

N.B: Le carré d'un nombre est toujours positif.

Activité 1

Consigne : Calcule les carrés des nombres :

O ; 1 ; 2 ; -2 ; 3 ; -3 ; 1,4 ; 1,5 ; 1,41 et 1,42.

II. QUE SIGNIFIE $\sqrt{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{a\ positif})$

Tu sais que $3^2 = 9$ alors $\sqrt{\mathbf{9}} = \mathbf{3}$ **;** on lit " racine carré de 9 égal à 3"

Le symbole $\sqrt{\ }$ est appelé radical. On dit que 9 est sous le radical.

Activité 2

Consigne :

1) Complète :

   3^2=9 alors $\sqrt{\mathbf{9}} = \mathbf{3}$

   0^2= alors $\sqrt{\ } =$

   1^2= alors $\sqrt{\ } =$

   2^2= alors $\sqrt{\ } =$

   4^2= alors $\sqrt{\ } =$

   5^2= alors $\sqrt{\ } =$

2) Trouve : $\sqrt{36} = \cdots$; $\sqrt{49} = \cdots$; $\sqrt{64} = \cdots$; $\sqrt{81} = \cdots$; $\sqrt{100} = \cdots$;

   $\sqrt{121} = \cdots$; $\sqrt{144} = \cdots$; $\sqrt{169} = \cdots$; $\sqrt{0{,}25} = \cdots$; $\sqrt{1{,}21} = \cdots$

Définition :

Pour tout nombre a positif, $\sqrt{a}$ est le nombre positif dont le carré est a.

Autrement dit $\sqrt{a^2} = a$ et $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$

$\sqrt{\mathrm{a}}$ n'existe jamais si a est négatif

Exemple: $\sqrt{-36}$ n′existe pas

$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a \text{ si } a \geq 0 \\ -a \text{ si } a \leq 0 \end{cases}$ ***Exemple***: $\begin{cases} \sqrt{7^2} = |7| = 7 \\ \sqrt{(-7)^2} = |-7| = 7 \end{cases}$

III. NOMBRES IRRATIONNELS

Observe la suite des carrés suivants :

$0^2 = 0$; $1^2 = 1$; $2^2 = 4$; $3^2 = 9$; $4^2 = 16$; $5^2 = 25$.

Les nombres 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 10 par exemple ne figure pas parmi les carrés. Et pourtant il existe un nombre qui multiplié par lui-même donne 2.

Ce nombre est $\sqrt{\mathbf{2}}$.

On a :

$(1{,}4)^2 = 1{,}96$ et $(1{,}5)^2 = 2{,}25$ donc $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$.

$(1{,}41)^2 = 1{,}9881$ et $(1{,}42)^2 = 2{,}0164$ donc $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$

Le nombre $\sqrt{2}$ existe mais sa valeur exacte n'est pas connue dans $\mathbb{Q}$. Donc $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel. Il est un nombre ***irrationnel***.

De même $2\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $5\sqrt{3}$; π; 7π; $\sqrt{13}$; $-3\sqrt{13}$; $5\sqrt{13}$ sont des nombres irrationnels.

IV. L'ENSEMBLE $\mathbb{R}$ DES NOMBRES REELS

Définition : Les nombres rationnels et les nombres irrationnels forment un grand ensemble appelé ensemble des nombres réels et noté $\mathbb{R}$.

Retiens que : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

V. LES FORMULES FONDAMENTALES

Activité 3

Consigne 1 : Calcule

$\sqrt{9 \times 4} = \cdots$ $\sqrt{9} \times \sqrt{4} = \cdots$

$\sqrt{4 \times 25} = \cdots$ $\sqrt{4} \times \sqrt{25} = \cdots$

$\sqrt{81 \times 100} = \cdots$ $\sqrt{81} \times \sqrt{100} = \cdots$

Consigne 2 : Calcule

$$\sqrt{\frac{9}{4}} = \cdots \qquad \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \cdots$$

$$\sqrt{\frac{36}{4}} = \cdots \qquad \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{4}} = \cdots$$

Propriétés : Pour tous nombres réels positifs a et b

$\sqrt{\mathbf{a} \times \mathbf{b}} = \sqrt{\mathbf{a}} \times \sqrt{\mathbf{b}}$ et $\sqrt{\mathbf{a}} \times \sqrt{\mathbf{b}} = \sqrt{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}$

$\sqrt{\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}} = \frac{\sqrt{\mathbf{a}}}{\sqrt{\mathbf{b}}}$ et $\frac{\sqrt{\mathbf{a}}}{\sqrt{\mathbf{b}}} = \sqrt{\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}}$

Consigne 3 :

1) Ecris sous la forme a$\sqrt{b}$

$\sqrt{8}$; $\sqrt{12}$; $\sqrt{18}$; $\sqrt{20}$; $\sqrt{45}$; $\sqrt{50}$;

2) Simplifie :

$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$; $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$; $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$; $\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}}$

VI. RESOLUTION DE L'EQUATION $x^2 = \alpha$

- Si α est positif, deux solutions :

  $\sqrt{\alpha}$ et -$\sqrt{\alpha}$ $S = \{-\sqrt{\alpha}\,;\sqrt{\alpha}\}$

- Si $\alpha = 0$, une seule solution : 0

  s = {0 }

- Si α est négatif, pas de solution s = ∅

  Activité 4

  Consigne : Résous les équations suivantes dans ℤ puis ℝ :

  $x^2 = 9$; $x^2 = 7$; $2x^2 = 32$; $x^2 = -4$.

EXERCICES

1) Décompose en produit de facteurs premiers le nombre $A = 11025$ puis en déduire que la racine carré de ce nombre est un entier.

2) Calcule :

$\sqrt{49} + \sqrt{16} - \sqrt{9}$; $\sqrt{81} - \sqrt{121} + \sqrt{64}$; $2\sqrt{25} - \sqrt{81}$;

$\sqrt{1{,}21} + \sqrt{0{,}49} - \sqrt{0{,}64}$; $\sqrt{3} + \sqrt{3}$; $2\sqrt{3} + 7\sqrt{3}$;

$2\sqrt{3} - 7\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 7\sqrt{3}$; $2\sqrt{3} - 5\sqrt{2} - 7\sqrt{3} + 9\sqrt{2}$

3) Ecris sous la forme $a\sqrt{b}$:

$\sqrt{12}$; $\sqrt{18}$; $\sqrt{20}$; $\sqrt{27}$; $\sqrt{45}$; $\sqrt{48}$; $\sqrt{50}$;

$\sqrt{80}$; $\sqrt{96}$; $\sqrt{125}$; $\sqrt{180}$; $\sqrt{675}$; $\sqrt{363}$

4) Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$x^2 = 25$; $x^2 - 64 = o$; $3x^2 = 48$; $x^2 = -25$;

$2x^2 - 98 = 0$; $x^2 - \frac{4}{9} = 0$ $25x^2 + 125 = 0.$

3) Démontre que : $1382976 = 2^6 \times 3^2 \times 7^4$ et en déduis :

a) La valeur exacte de $\sqrt{1382976}$

b) La valeur exacte de $\sqrt{1{,}382976}$

Calcul dans $\mathbb{R}$

I. RAPPELS : Pour $a \geq 0$ et $b > 0$

$\sqrt{\mathbf{a}} \times \sqrt{\mathbf{b}} = \sqrt{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}$ et $\sqrt{\mathbf{a} \times \mathbf{b}} = \sqrt{\mathbf{a}} \times \sqrt{\mathbf{b}}$; $\dfrac{\sqrt{\mathbf{a}}}{\sqrt{\mathbf{b}}} = \sqrt{\dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}}$ et $\sqrt{\dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}} = \dfrac{\sqrt{\mathbf{a}}}{\sqrt{\mathbf{b}}}$

Activité 1

Consigne 1 : Simplifie

$\sqrt{8} \times \sqrt{2}$; $\sqrt{6} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3}$; $\sqrt{75} \times \sqrt{3}$; $2\sqrt{5} \times \left(-\sqrt{45}\right)$;

$2\sqrt{5} \times 3\sqrt{3}$; $\dfrac{\sqrt{63}}{2\sqrt{45}}$; $\sqrt{\dfrac{5}{14}} \times \sqrt{\dfrac{10}{7}}$

Consigne 2 : Calcule

$a = 3\sqrt{5} - 7\sqrt{5} + 12\sqrt{5}$; $b = 8\sqrt{7} - \sqrt{3} + \sqrt{7} - 5\sqrt{3}$;

$c = \sqrt{18} - \sqrt{8} - \sqrt{2}$; $d = 5\sqrt{80} - \sqrt{180} + \sqrt{20}$;

$e = 2\sqrt{3} - 5\sqrt{300} + 4\sqrt{12}$

II. DEVELOPPEMENT

- $\boldsymbol{a(b + c) = ab + ac}$ • $\boldsymbol{a(b - c) = ab - ac}$
- $\boldsymbol{(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd}$

Activité 2

Consigne : Développe et réduis les produits

$\sqrt{3}\left(5 + 2\sqrt{2}\right)$; $\sqrt{2}\left(0{,}3 - \sqrt{2}\right)$; $2\sqrt{5} + 1 - \left(3\sqrt{5} + 1\right)$;

$\left(5 + 2\sqrt{5}\right)\left(3 - \sqrt{2}\right)$; $\left(\sqrt{3} + 2\right)\left(\sqrt{5} - 1\right)$

III. QUOTIENT DE DEUX REELS (RENDRE RATIONNEL)

$$\boldsymbol{\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a \times \sqrt{b}}{\sqrt{b} \times \sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}}; \qquad \boldsymbol{\frac{a}{b\sqrt{c}} = \frac{a \times \sqrt{c}}{b\sqrt{c} \times \sqrt{c}} = \frac{a\sqrt{c}}{bc}}$$

On dit que nous avons écris sans radical le dénominateur (ou rendu rationnel le dénominateur)

Activité 3

Consigne 1 : Ecris sans radical le dénominateur (ou rends rationnel le dénominateur) : $\frac{5}{\sqrt{3}}$; $\frac{7}{\sqrt{6}}$; $\frac{2}{3\sqrt{5}}$; $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

Consigne 2 : Calcule et simplifie : $\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}$; $\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{5}{25}$; $\frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{5\sqrt{6}}{2}$

IV. EXTRACTION DE LA RACINE CARREE

Exemple :

9 73 44	312
-9	$3^2 = 9$
0 73	$6\ 1 \times 1 = 61$
-61	$62\ 2 \times 2 = 1244$
12 44	
-1244	
0000	$\boldsymbol{\sqrt{97344} = 312}$

Activité 4

Consigne : Détermine de même $\boldsymbol{\sqrt{625}\ et\ \sqrt{3}}$

V. COMPARAISON DE DEUX NOMBRES IRRATIONNELS

1. En comparant leurs carrés

Si x et y sont positifs et si $x^2 < y^2$ alors $x < y$

Si x et y sont négatifs et si $x^2 < y^2$ alors $x > y$

Activité 5

Consigne 1 : Les deux nombres sont positifs

Compare $2\sqrt{3}\ et\ 3\sqrt{2}$; $5\sqrt{2}\ et\ 2\sqrt{7}$

$(2\sqrt{3})^2 = 4 \times 3 = 12$; $(3\sqrt{2})^2 = 9 \times 2 = 18$

$(2\sqrt{3})^2 < (3\sqrt{2})^2$ alors $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$

$(5\sqrt{2})^2 = 25 \times 2 = 50$; $(2\sqrt{7})^2 = 4 \times 7 = 28$

$(5\sqrt{2})^2 > (2\sqrt{7})^2$ alors $5\sqrt{2} > 2\sqrt{7}$

Consigne 2 : Les deux nombres sont négatifs

Compare : $-2\sqrt{3}\ et - 3\sqrt{2}; -5\sqrt{2}\ et - 2\sqrt{7}$

$\left(-2\sqrt{3}\right)^2 < \left(-3\sqrt{2}\right)^2$ alors$(-2\sqrt{3}) > (-3\sqrt{2})$

$\left(-5\sqrt{2}\right)^2 > \left(-2\sqrt{7}\right)^2$ alors $\left(-5\sqrt{2}\right) < (-2\sqrt{7}\,)$

2. **En comparant leurs valeurs approchées**

Consigne 3 : On donne $\sqrt{2} = 1{,}414;\ \sqrt{3} = 1{,}732;\ \sqrt{7} = 2{,}645$

Compare $2\sqrt{3}\ et\ 3\sqrt{2}; -5\sqrt{2}\ et - 2\sqrt{7}$

$2\sqrt{3} = 2 \times 1{,}732 = \quad et\ 3\sqrt{2} = 3 \times 1{,}414 = \quad alors\ 2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$

$-5\sqrt{2} = -5 \times 1{,}414 = \quad et - 2\sqrt{7} = -2 \times 2{,}645 =$

$alors \quad \left(-5\sqrt{2}\right) < (-2\sqrt{7}\,)$

VI. FACTORISATION

Activité 6

Consigne 1 : Le facteur commun est apparent

Factorise : A = $3x^2$ - 2x et B = (x + 2)(4x – 5) + (x + 2)(5x + 1)

Rép : A = x(x – 2) et B = (x + 2)(9x – 4)

Consigne 2 : Le facteur commun est caché

Factorise : A = 3x + 6 ; B = $6x^2$ - 15x ;

C = (2x + 3)(4x – 3) - (4x + 6)(3x + 8) ;

D = (2x + 3)(x – 1) + (1 - x)

Rép : A = 3(x + 2) ; B = 3x(2x – 5) ; D = (x - 1)(2x + 2) = 2(x – 1)(x + 1)

C = (2x + 3)(-2x – 19) = -(2x + 3)(2x + 19)

EXERCICES

1) Simplifie(ou calcule, ou écris sous la forme $a\sqrt{b}$)

$A = \sqrt{44} - 5\sqrt{11} + \sqrt{99}$; $B = \sqrt{18} - 2\sqrt{50} + \sqrt{32}$;

$C = 8\sqrt{48} - 7\sqrt{27}$; $D = \sqrt{80} - 10\sqrt{20} + 2\sqrt{45}$;

$E = 2\sqrt{13} - 4\sqrt{117} + 9\sqrt{52}$$F = \sqrt{80} - \sqrt{605} + 3\sqrt{245}$;

$G = 2\sqrt{48} - 5\sqrt{63} + \sqrt{700}$; $H = 5\sqrt{28} - \sqrt{63} + 2\sqrt{175}$;

$I = \sqrt{54} - 5\sqrt{96} + 3\sqrt{150}$

2) Effectue les calculs suivants sous la forme $a + b\sqrt{n}$ ou a et b sont des entiers relatifs et n un entier naturel :

$J = 2\sqrt{45} + \sqrt{225} - \sqrt{20} + \sqrt{125}$$K = \sqrt{625} - \sqrt{28} + \sqrt{112} - 18$

$L = \sqrt{363} + 5\sqrt{3} + \sqrt{2} \times \sqrt{18} - 3\sqrt{12}$

4) Calcule :

$\sqrt{75} \times \sqrt{80}$; $3\sqrt{45} \times 2\sqrt{5}$; $4\sqrt{27} \times 2\sqrt{12}$;

$5\sqrt{72} \times 3\sqrt{50}$; $\sqrt{72} + \sqrt{128}$

5) Ecris sans radical au dénominateur ou rends rationnel :

$\frac{2}{\sqrt{7}}$; $\frac{5}{\sqrt{13}}$; $\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$; $\frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{3}}$; $\frac{3}{2\sqrt{3}}$; $\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{5}}$

6) Simplifie :

$A = \sqrt{12 - \sqrt{12 - \sqrt{12 - \sqrt{9}}}}$; $B = \sqrt{5 \times \sqrt{5 \times \sqrt{5 \times \sqrt{5^2}}}}$

$C = \sqrt{5 \times \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2^2}}}}$; $D = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{9}}}}$;

$E = \sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{3 + \sqrt{1}}}}$

7) Trouve x pour que $\sqrt{x + \sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{3 + \sqrt{1}}}}} = 5$

8) Range dans l'ordre décroissant les nombres réels suivants en comparant leurs carrés : $2\sqrt{5}$; $5\sqrt{2}$; $3\sqrt{3}$; $2\sqrt{6}$; 5

9) Résous dans R l'équation : $x\sqrt{3} - \sqrt{27} = 0$ et montre que la solution trouvée est un entier naturel.

10) Développe et réduis

$a = (5x - 4)(x + 3)$; $b = (x + 7)(4-5x)$; $c = -2(2x + 5)(x - 3)$

$d = 3x(x - 4)(7x - 1)$; $e = (x + 5)(x - 3) + (2 - x)(3x - 2)$;

$f = (3x + 2)(3x + 1) - (3x -1)(3x + 1)$

$g = (2x + 3)(3x - 2) - (x + 1) - (x + 1)(x - 1) + 3(x - 2)(2 - x)$

11) Factorise

$A = 21 - 7x$; $B = 48 + 8a$; $C = 35x - 7a + 42$

$D = (x + 2)(x - 3) + (x + 2)(2x - 1)$;

$E = (2y - 3)(4x - 1) + 2x(2y -3)$;

$F = 5(x - 2)(x + 3) + 4(2 - x)(x + 1)$;

$G = 4x - 12 - 7(x - 3)$

Puissances d'un nombre réel

I. DEFINITION :

Soit a un réel non nul et n un entier naturel :

$a \times a \times \ldots \times a$ (n facteurs) $= a^n$ se lit ''a puissance n''.

$\boldsymbol{Dans\ a^n}, \begin{cases} \boldsymbol{n\ est\ l'exposant} \\ \boldsymbol{a\ est\ la\ base} \end{cases}$

L'exposant indique le nombre de facteurs.

Remarque :

$a \times a = a^2$ se lit '' a puissance 2 '' ou '' a au carré''

$a \times a \times a = a^3$ se lit ''a puissance 3'' ou '' a au cube''.

Pour tout réel non nul a :

$a^0 = 1$ et $a^1 = a$; $a^n \neq a \times n$; $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ Exemple : $\frac{1}{2^5} = 2^{-5}$

Activité 1

Consigne 1 : Ecris sous forme d'une puissance

$2 \times 2 \times 2 = \cdots$; $(-3).(-3).(-3).(-3) = \cdots$.

$\pi.\pi.\pi.\pi.\pi = \cdots$; $\sqrt{3}.\sqrt{3}.\sqrt{3}.\sqrt{3}. = \cdots$

$49 = \ldots$; $1000 = \ldots.$; $3\sqrt{3} = \ldots.$

Consigne 2 : Calcule puis complète avec $=$ ou $\neq$

$15^2 = \ldots$ et $15 \times 2 = \ldots$ alors $15^2 \ldots 15 \times 2$;

$(-3)^4 = \cdots$ et $(-3) \times 4 = \cdots$ *alors* $(-3)^4 \ldots (-3) \times 4$.

II. SIGNE DE a^n

Activité 2

Consigne : Calcule : $(-1)^1 = \cdots$; $(-1)^2 = \cdots$; $(-1)^3 = \cdots$; $(-1)^4 = \cdots$; $(-1)^5 = \cdots$; $(-1)^6 = \cdots$; $(-1)^7 = \cdots$; $(-1)^8 = \cdots$

Tous les nombres négatifs se comportent de cette manière.

Signe de a^n : Si a est un réel négatif :

- a^n est positif lorsque n est pair
- a^n est négatif si n est impair.

III. PROPRIETE DES PUISSANCES

- Produit de puissances d'un même nombre

$$\boldsymbol{a^n . a^p = a^{n+p}} \; avec \; \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z} \; et \; \boldsymbol{p} \in \mathbb{Z}$$

Exemple : $2^3 . 2^4 = 2^7$

- Puissance d'une puissance

$(\mathbf{a^n})^{\mathbf{p}} = \mathbf{a^{n.p}}$ *Exemple*: $(2^3)^4 = 2^{12}$

- Quotient de deux puissances d'un même nombre

$$\frac{\boldsymbol{a^n}}{\boldsymbol{a^p}} = \boldsymbol{a^{n-p}} \quad Exemple: \; \frac{\mathbf{2^3}}{\mathbf{2^4}} = \mathbf{2^{3-4}} = \mathbf{2^{-1}}$$

- Puissance d'un produit : $(\mathbf{a.b})^{\mathbf{n}} = \mathbf{a^n . b^n}$

Exemple : $(3x)^2 = 3^2 . x^2 = 9x^2$; $\left(2\sqrt{3}\right)^2 = 4 \times 3 = 12$

- Puissance d'un quotient $\left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right)^{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{a^n}}{\mathbf{b^n}}$ **Exemple :** $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$

- $\left(\sqrt{\mathbf{a}}\right)^{\mathbf{3}} = \mathbf{a}\sqrt{\mathbf{a}}$ **D'une manière générale :** Pour tout réel a positif

$\sqrt{a^n} = a^{\frac{n}{2}}$ lorsque n est pair

$\sqrt{a^n} = a^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{a}$ lorsque n est impair

Exemple

$\sqrt{2^6} = 2^{\frac{6}{2}} = 2^3$ car 6 est pair

$\sqrt{2^7} = 2^{\frac{7-1}{2}}\sqrt{2} = 2^3\sqrt{2}$ car 7 est impair

- $\mathbf{a^n} = \mathbf{a^p}$ *lorsque* $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{p}$ *et* $\boldsymbol{a^n} = \mathbf{b^n}$ *lorsque* $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$

Exemple : $5^a = 5^2$ alors $a = 2$

Activité 3

Consigne 1 : Ecris sous la forme d'une seule puissance d'un nombre réel

$(-7)^4$; $(-7)^6$; $\left(\sqrt{3}\right)^5 \times \left(\sqrt{3}\right)^3 \times \left(\sqrt{3}\right)$; $\left(\frac{-1}{3}\right)^2 . \left(\frac{-1}{3}\right)^4 . \left(\frac{-3}{3}\right)$;

$(x^3)^7$; $\left[\left(\frac{-7}{9}\right)^5\right]^7$; $\left[\left(\sqrt{2}\right)^3\right]^2 . \left[\left(\sqrt{2}\right)^4\right]^3$.

Consigne 2 : Remplace les points par les nombres qui conviennent

$$\frac{x^9 . y^{12}}{27m^6} = \left[\frac{x^{\cdots} y^{\cdots}}{\ldots m^{\cdots}}\right]^3$$

Consigne 3 :

Trouve x dans les cas suivants : $2^x . 2^3 = 2^7$; $(a^3)^x = a^{12}$

Consigne 4 : Calcule $\mathrm{A} = 2x^2 - 3x + 2$ pour $\mathrm{x} = 3$ puis pour $\mathrm{x} = \sqrt{2}$.

EXERCICES

1) Effectue

$(-2)^3$; -2^3 ; $(\sqrt{2})^3$; $(-10)^5$; $(-1)^{13}$; $(-1)^{26}$; $(+1)^{15}$

2) Indique si les nombres suivants appartiennent à $\mathbb{R}^+$ *ou* $\mathbb{R}^-$

$(-2)^5$; $(-5)^{13}$; $(-0,04)^{26}$; $(+1)^{14}$; $(-5185)^{5012}$; $(-64)^{1793}$; $(-1)^{26}$

3) Ecris sous la forme d'une seule puissance d'un nombre réel

$(-3)^4\times(-3)^7$; $4^{11}\times4^{13}$; $\left[(\sqrt{5})^4\right]^5$; $(7^3)^2$; $(-2)^2\times[(-2)^3]^2$; $8^7\times5^7$;

$[(-3)\times4]^2$; $(-5)\times[(-5)^3]^2$

4) Trouve le naturel x tel que

a) $3^2\times3^x = 3^7$; $(-5)^3\times(-5)^4\times(-5)^x = (-5)^{13}$

b) $[(-7)^x]^2 = (-7)^{10}$; $(-4)^4\times[(-4)^3]^x = (-4)^{13}$

c) $\frac{7^x}{7^7} = 7^2$; $\frac{3^x}{3^4} = 1$; $2^x \times 2^{-5} = 1$

d) $x^3 = 5^3$; $(x^2)^4 = (3^4)^2$

5) Soient a et b deux réels non nuls, on donne

$$A = ab^2 \times \left(\frac{1}{b}\right)^4 \quad et\ B = a^2\left(\frac{b}{a}\right)^3 \times \frac{1}{b^2}$$

a) Donne une écriture simplifiée de A et de B.

b) Calcule la valeur numérique de AxB et de $\frac{A}{B}$ pour

$a = 4.10^{-3}$ et $b = 2.10^{-2}$

6) Complète le tableau numérique ci- dessous :

x	-0,3	0,025	0,25	0,275	0,3	1,6	2	0,35
x^2	0,09					2,56		
x^3				0,020796875			8	0,042875

On donne : $A = x^2 + 0,5x - 0,075$ et $P = x^3 - 1,55x^2 + 0,155x + 0,12$.

Calcule A et P pour : x = 0,025 ; x = -0,3 ; x = 1,6 ; x = 0,25 ; x = 0,3

Produits remarquables

I. IDENTITES REMARQUABLES ET DEVELOPPEMENT

Pour tous nombres réels a et b, on développe :

$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{2ab} + \boldsymbol{b}^2$

$(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{2ab} + \boldsymbol{b}^2$

$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{b}^2$

Activité 1

Consigne 1 : Développe et réduis

$(3x+2)^2 = \cdots ;\ \left(\frac{1}{3}x+4\right)^2 = \cdots$

$\left(\sqrt{3}+5\right)^2 = \cdots ;\ \left(a\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2 = \cdots$

Consigne 2 : Développe et réduis

$(2x-3)^2 = \cdots ;\ \left(\frac{3}{2}x-\frac{5}{7}\right)^2 = \cdots$

$\left(1-\sqrt{2}\right)^2 = \cdots ;\ \left(a\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2 = \cdots$

Consigne 3 : Développe et réduis

$(4x+5)(4x-5) = \cdots ;\ \left(a\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(a\sqrt{3}+\sqrt{2}\right) = \cdots ;$

$\left(\sqrt{2}-x\right)\left(\sqrt{2}+x\right) = \cdots ;\ \left(\frac{1}{3}x+2\right)\left(\frac{1}{3}x-2\right) = \cdots$

II. IDENTITES REMARQUABLES ET FACTORISATION

Pour tous nombres réels a et b, on factorise :

$\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{2ab} + \boldsymbol{b}^2 = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2$

$\boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{2ab} + \boldsymbol{b}^2 = (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2$

$\boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{b}^2 = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$

Activité 2

Consigne 1 : Factorise les expressions suivantes

$25x^2+30x+9=$ … ; $x^2+2x+1=$… ; $x^2-8x+16=$… ; $2-x^2=$…

$9x^2-24x+16=$ … ; $16x^2-25=$ … ; $x^2-\frac{1}{9}=$… ;$(x-1)^2-4=$…

Consigne 2 : Ecris sous forme de produit de facteurs les expressions suivantes :

A= $(2x - 5)^2$ - $(3x - 5)(2x+1)$

B= x^2+ - 9 + $(2x +5)(x+3)$

C= $(2x -3)^2$ - $(x + 2)^2$

III. RENDRE RATIONNEL LE DENOMINATEUR D'UN QUOTIENT

a + b et **a – b** sont deux **expressions conjuguées** l'une de l'autre. Leur produit, $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{b}^2$ est en général un rationnel.

Pour rendre rationnel le dénominateur d'un quotient, on multiplie le numérateur et le dénominateur par l'expression conjuguée du dénominateur.

Exemple : Dans $\frac{5}{\sqrt{3}-1}$

$\sqrt{3} - 1$ est le dénominateur, son expression conjuguée est $\sqrt{3} + 1$ donc :

$$\frac{5}{\sqrt{3}-1} = \frac{5(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{5(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \frac{5(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \frac{5(\sqrt{3}+1)}{2}$$

Activité 3

Consigne 1 : Rends rationnel le dénominateur :

$$\frac{3}{\sqrt{5}-2};\ \frac{3\sqrt{2}}{3+\sqrt{3}}$$

Consigne 2 : Effectue

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{5}}-\mathbf{1}} + \frac{\mathbf{3}}{\sqrt{\mathbf{5}}+\mathbf{1}}$$

EXERCICES

1) Développe et réduis

$a = (7x+3)^2$; $b = \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{4}\right)^2$; $c = \left(\sqrt{5}+4\right)^2$; $d = (5x-3)^2$;

$e = \left(\frac{7}{2} - \frac{2}{3}x\right)^2$; $g = (7x-4)(7x+4)$;

$h\left(\frac{3}{5} - \frac{2}{3}x\right)\left(\frac{3}{5} + \frac{2}{3}x\right)$; $i = \left(2\sqrt{3}+7\right)\left(2\sqrt{3}-7\right)$;

$j = (x+3)^2 - (x-4)(x+4) + (4x-3)^2$;

2) Factorise

$A = 64x^2 + 112x + 49$; $B = 36x^2 + 25 + 60x$

$C = x^2 - 10x + 25$; $D = 9x^2 + 64 - 48x$

$E = 49x^2 - 4$; $12x^2 - 75$; $G = \frac{49}{25} - \frac{81}{64}x^2$

$H = (5x+3)^2 - (2x-5)^2$; $I = \left(\frac{7}{2}x - \frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{4}\right)^2$

3) Ecris sans radical au dénominateur

$\frac{1}{3+\sqrt{2}}$; $\frac{2}{5+2\sqrt{3}}$; $\frac{2+3\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$; $\frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; $\frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

4) On donne $A = 5 + 2\sqrt{3}$ *et* $B = 5 - 2\sqrt{3}$

a) Calcule A^2, B^2 et $A \times B$

b) Ecris $\frac{A}{B}$ sans radical au dénominateur

5) a) Ecris le réel $\frac{-2+2\sqrt{3}}{-2+\sqrt{3}}$ sans radical au dénominateur et sous une forme aussi simple que possible.

b) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{3}(x-1) + 3\sqrt{3} = 2(x-1) + 4\sqrt{3}$

6) *Soit* $C = \frac{5 - \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{27}-\sqrt{12}}$. *Calcule* C.

Suites de nombres proportionnels

I. DEFINITION D'UNE SUITE DE NOMBRES PROPORTIONNELS

Activité 1

Consigne 1 : Au marché, on a relevé les prix suivants de sucre chez quatre boutiquiers :

	Chez le 1er	Chez le 2ème	Chez le 3ème	Chez le 4ème
Prix en F CFA	3000	1200	4200	6000
Masse en kg	5	2	7	10

Ces boutiquiers ont – ils vendus le kilogramme de sucre au même prix ?

Exemple de réponse

$$\frac{3000}{5} = 600; \frac{1200}{2} = 600; \frac{4200}{7} = 600; \frac{6000}{10} = 600$$

Ces boutiquiers ont vendu le kilogramme de sucre au même prix car les quotients calculés sont tous égaux à 600.

On dit que les deux suites de nombres

3000 ; 1200 ; 4200 ; 6000 et 5 ; 2 ; 7 ; 10 sont proportionnelles

On écrit :

$$\frac{3000}{5} = \frac{1200}{2} = \frac{4200}{7} = \frac{6000}{10} = 600$$

Le nombre 600 est le coefficient (ou rapport) de proportionnalité.

Le tableau suivant appelé tableau de proportionnalité permet de retrouver les termes cachés ou effacés d'une des deux suites.

: 600 ↓

3000	1200	4200	6000
5	2	7	10

↑ X 600

Exemple : Considérons le même tableau de proportionnalité avec des effacés. Retrouvons ces termes effacés. Soit x et y ces deux termes.

: 600 ↓

3000	x	4200	6000
5	2	y	10

↑ X 600

$x = 2 \times 600 = 1200 \qquad y = 4200 \div 600 = 7$

Consigne 2 : Les suites : 30 10 70 et 6 2 14 sont-t-elles des suites de nombres proportionnels ? Pourquoi ?

Consigne 3 : Complète de manière à obtenir deux suites de nombres proportionnels après calcul du coefficient

$a)\ \frac{800}{2} = \frac{2000}{x} = \frac{y}{7} = \frac{4000}{t}$

b)

30	10	
	2	14

Définition : Deux suites de nombres non nuls :

$a, b, c, \dots$ *et* $a', b', c', \dots$ sont proportionnels lorsque les quotients

$\frac{a}{a'}; \frac{b}{b'}; \frac{c}{c'}; \dots$ *sont tous égaux on note* $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \cdots = k$

(k est le coefficient ou rapport de proportionnalité)

II. DEFINITION D'UNE PROPORTION :

On dit que quatre nombres, (a, b, c, d) pris dans cet ordre forment une proportion lorsque $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

a et d sont les extrêmes **;** b et c sont les moyens.

Propriété fondamentale : Dans une proportion, le produit des moyens est égal au produit des extrêmes.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\ alors\ bc = ad$

Activité 2

Consigne 1 :

Reconnais les proportions dans les exemples suivants :

(3; 4 ; 6 ; 8) ; (2 ; 7 ; 3 ; 6) ; $\frac{\sqrt{3}}{a} = \frac{3}{a\sqrt{3}}$

Consigne 2 :

Sachant que (-5,1 ; 2,7 ; 17 ; x) forment une proportion, calcule x.

Consigne 3 :

Sachant que (9π ; x ; x ; π) est une proportion, calcule x.

III. PROPRIETES

Propriété 1 : Dans une proportion, on peut :

- Permuter les extrêmes : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ équivaut à $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$
- Permuter les moyens : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ équivaut à $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$
- Permuter à la fois les moyens et les extrêmes :

  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ équivaut à $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$

Activité 3

Consigne : Détermine deux nombres a et b sachant que $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$ $et\ a + b = 10$

Propriété 2 : On démontre que :

$$\mathbf{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}}$$

$$\mathbf{\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{a+3b-5c}{a'+3b'-5c'}}$$

Démonstration

Démontrons par exemple que :

$$\boldsymbol{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}}\ et\ \boldsymbol{\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{a+3b-5c}{a'+3b'-5c'}}$$

$Posons\ \ \boldsymbol{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}} = k, on\ a : \frac{a}{b} = k\ alors\ a = kb\ \ et\ \ \frac{c}{d} = k\ alors\ c = kd$

$a + c = kb + kd = k(b + d)\ ainsi\ \ k = \frac{a+c}{b+d}$

$D'où\ \ \boldsymbol{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}}\ de\ même\ on\ démontre\ que\ \boldsymbol{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}}$

$Démontrons\ par\ exemple\ que\ \boldsymbol{\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{a+3b-5c}{a'+3b'-5c'}}$

$Posons\ \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k, on\ a$:

$\frac{a}{a'} = k \; alors \; a = ka', \frac{b}{b'} = k \; alors \; b = kb' \;\; et \quad \frac{c}{c'} = k \; alors \; c = kc'$

$a + 3b - 5c = ka' + 3kb' - 5kc' = k(a' + 3b' - 5c') \; ainsi$

$k = \frac{a + 3b - 5c}{a' + 3b' - 5c'} \; d'où \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a'}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b'}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{c'}} = \frac{\boldsymbol{a + 3b - 5c}}{\boldsymbol{a' + 3b' - 5c'}}$

Activité 4

Consigne : Trouve trois nombres a, b, c proportionnels à 5, 3, 7 sachant que $2a - b + c = 28$.

IV. GRANDEURS INVERSEMENT PROPORTIONNELLES

Les grandeurs a, b, c, … sont inversement proportionnelles aux grandeurs a’, b’, c’, … lorsque :

$\frac{a}{\frac{1}{a'}} = \frac{b}{\frac{1}{b'}} = \frac{c}{\frac{1}{c'}} = \cdots \; ou \;\; \boldsymbol{aa'} = \boldsymbol{bb'} = \boldsymbol{cc'} = \ldots$

Activité 5

Consigne : Trouve trois nombres x, y, z inversement proportionnels à 3, 2, 5 sachant que $x + y - z = 57$

EXERCICES

1) Calcule les réels a et b sachant que (a, b, 3, 5) forment une proportion et $a + b = 72$
2) Calcule x et y tel que : $\frac{x}{y} = 5 \; et \; x + y = 4{,}2$
3) Voici deux suites de nombres proportionnels, trouve x, y, z et t.

65	260	39	z	117
x	300	y	105	t

4) Trouve x, y, z et t sachant que

$$\frac{46}{x} = \frac{230}{z} = \frac{414}{108} = \frac{y}{6} = \frac{t}{72}$$

5) Trouve les nombres x vérifiant : $\frac{2x}{45} = \frac{280}{7x}$
6) Partage 66080F entre trois personnes proportionnellement à 4 ; 5 et 7.
7) Le directeur de l'école décide de partager une somme entre les quatre meilleurs élèves proportionnellement à 13, 10, 7 et 4.
   a) Trouve la part de chaque élève sachant que le premier doit recevoir 58500F.
   b) Calcule la somme à partager.
8) Le périmètre d'un terrain triangulaire est de 150 m.
   Les mesures des côtés sont proportionnelles aux nombres 4 ; 5 et 6.
   Calcule les dimensions de ce terrain.
9) Partage 48000 en parties proportionnelles à 5 ; 11 et 14.
10) Trouve trois nombres x, y et z proportionnels à 2 ; 3 et 5 sachant que
    $3x + 2y + z = 1870.$

11) A la suite des résultats du DEF, le Ministère de l'Education Nationale a décidé de donner des prix aux trois meilleurs élèves du Mali. Le premier reçoit une somme de 400000F ; le deuxième une somme de 300000F et le troisième une somme de 200000F.

Pour les motiver encore plus, on leur donne la somme de 180000F tout en leur exigeant de faire le partage proportionnellement à leur premier gain.

Quelle est la part qui reviendra à chacun d'eux ?

12) Quatre rectangles ont les dimensions consignées dans le tableau suivant :

Longueur (cm)	3,6	14,4	7,2	4,8
Largeur (cm)	2,4	0,6	1,2	1,8

a) Montre que les longueurs sont inversement proportionnelles aux largeurs.

b) Compare les surfaces de ces rectangles.

Encadrement d'un réel par des décimaux

I. ENCADREMENT D'UN NOMBRE REEL

Activité 1

Consigne : Effectue $\frac{8}{7}$ à 0,001 près puis complète avec l'un des signes d'inégalité $< ou >$.

$1{,}14 \ldots \frac{8}{7}$; $\frac{8}{7} \ldots 1{,}15$

Exemple de réponse

$\frac{8}{7} = 1{,}142$ on a : $1{,}14 < \frac{8}{7}$; $\frac{8}{7} < 1{,}15$

Conclusion : On peut donc écrire la double inégalité suivante :

$1{,}14 \leq \frac{8}{7}$; $\frac{8}{7} < 1{,}15 \ ou \ 114.10^{-2} \leq \frac{8}{7} < 11510^{-2}$

On dit que nous avons réalisé un encadrement d'ordre 2 de $\frac{8}{7}$ car

$1{,}15 - 1{,}14 = 0{,}01 = \frac{1}{100} = 10^{-2}$

- L'amplitude de cet encadrement est : 0,01 ou $\frac{1}{100}$ ou 10^{-2}
- 1,14 *une valeur approhée de* $\frac{8}{7}$ à 10^{-2} près par **défaut**.
- 1,15 *est une valeur approchée de* $\frac{8}{7}$ à 10^{-2} par **excès**.

Règle : Pour encadrer un réel négatif, on encadre d'abord sa valeur absolue puis on multiplie cette double inégalité par (-1).

Activité 2

Consigne 1 :

Trouve l'encadrement d'ordre 2 puis d'ordre 3 de $\pi = 3{,}14159$

Rép : D'ordre 2 : $3{,}14 \leq \pi < 3{,}15$; D'ordre 3 : $3{,}141 \leq \pi < 3{,}142$

Consigne 2 :

Trouvons l'encadrement d'ordre 1 puis d'ordre 2 du nombre négatif $-\frac{3}{7}$

Exemple de réponse

$\frac{3}{7} = 0{,}4285$

Encadrement d'ordre 1 de $-\frac{3}{7}$

$0{,}4 \ \leq \ \frac{3}{7} < \ 0{,}5 \ on\ en\ déduit - 0{,}5 \leq \ \frac{3}{7} < -0{,}4$

Encadrement d'ordre 2 de $-\frac{3}{7}$

$0{,}42 \ \leq \ \frac{3}{7} < \ 0{,}43 \ on\ en\ déduit - 0{,}43 \leq \ \frac{3}{7} < -0{,}42$

II. ENCADREMENT D'UNE SOMME

Règle : Pour trouver un encadrement de a et b, on ajoute membre à membre les encadrements de a et b.

$$\begin{array}{c} x \ \leq \ a \ < \ y \\ x' \leq \ b \ < \ y' \\ \hline x + x' \leq \ a + b \ < y + \ y' \end{array}$$

Activité 3

Consigne : On donne les encadrements :

$3{,}1415 \ \leq \ \pi \ < \ 3{,}141 \ et \ 1{,}7320 \leq \sqrt{3} < \ 1{,}7321$

Trouve un encadrement de $\pi + \sqrt{3}$

Rép :$4{,}8735 \leq \pi + \sqrt{3} < 4{,}6737$

On en déduit les encadrements

Ordre 0 : $4 \leq \pi + \sqrt{3} < 5$

Ordre 2 : $4{,}87 \leq \pi + \sqrt{3} < 4{,}88$

Ordre 3 : $4{,}873 \leq \pi + \sqrt{3} < 4{,}874$

III. ENCADREMENT D'UN PRODUIT

Règle 1 : Pour encadrer le produit a$\sqrt{5}$, on multiplie membre à membre les inégalités.

Règle2 : Pour encadrer $-a\sqrt{5}$, on encadre d'abord $|-a\sqrt{5}|$ puis on multiplie les membres de l'inégalité par (-1)

Activité 4

Consigne : On donne les encadrements :

$0{,}571 \leq a < 0{,}572 \; et \; 2{,}236 \leq \sqrt{5} < 2{,}237.$

Trouve un encadrement d'ordre 1 et d'ordre 3 de $\mathrm{a}\sqrt{5}$ et $-\mathrm{a}\sqrt{5}$

Rép : $1{,}276756 \leq a\sqrt{5} < 1{,}279564$

On en déduit les encadrements :

Ordre 1: $1{,}2 \leq a\sqrt{5} < 1{,}3$

Ordre 3 : $1{,}276 \leq a\sqrt{5} < 1{,}277$

Ordre 1: $-1{,}3 \leq -a\sqrt{5} < -1{,}2$

Ordre 3 : $-1{,}277 \leq -a\sqrt{5} < -1{,}276$

IV. ENCADREMENT D'UN QUOTIENT EXACT

Règle : Pour trouver un encadrement du quotient $\frac{x}{y}$, on procède comme suit : $a \leq x < b \; et \; c \leq y < d$

On fait : $\frac{a}{d} \leq \frac{x}{y} < \frac{b}{c}$

Activité 5

Consigne : 0n donne $3{,}14 \leq \pi < 3{,}15 \; et \; 1{,}41 \leq \sqrt{2} < 1{,}42$

Trouve un encadrement du quotient $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Rép : $2{,}21126 \leq \frac{\pi}{\sqrt{2}} < 2{,}23404$

On en déduit les encadrements

Ordre 1: $2{,}2 \leq \frac{\pi}{\sqrt{2}} < 2{,}3$

Ordre 2 : $2{,}21 \leq \frac{\pi}{\sqrt{2}} < 1{,}22$

Ordre 3 : $2{,}211 \leq \frac{\pi}{\sqrt{2}} < 1{,}212$

V. ENCADREMENT D'UNE RACINE CARREE

On extrait la racine carrée. Cela permet de trouver des encadrements d'un ordre aussi grand qu'on le souhaite.

Activité 6

Consigne : Trouve l'encadrement d'ordre 2 puis d'ordre 3 de $\sqrt{147}$.

Exemple de réponse

147	12,124
-1	$1^2=1$
047	$22\times2=44$
-44	$241\times1=241$
0300	$2422\times2=4844$
-241	$14244\times4=56976$
05900	
-4944	
105600	
-56976	
45624	

$\sqrt{147} = 12{,}124$

Ordre 2 : $12{,}1 \leq \sqrt{147} < 1{,}2$; **Ordre 3** : $12{,}124 \leq \sqrt{147} < 1{,}125$

EXERCICES

1) Soit x = 1,712123… et y = 2,513444…
   a) Encadre x et y à 10^{-1} près
   b) Encadre x et y à 10^{-2} près
   c) Encadre x et y à 10^{-3} près
   d) Encadre $x + y$ à 10^{-2} près
   e) Encadre 8x et -4y à 10^{-1} près
2) soit$x = \frac{13}{7}$ $et\ y = \frac{19}{17}$
   a) Trouve les valeurs approchées par défaut à 10^{-3} près de x et de y.
   b) Encadre $x + y$ à 10^{-2} près
   c) Encadre 3x - 2 et -2y +5 à 10^{-2} près
   d) Encadre $\frac{x}{y}$ à 10^{-1} près
3) On donne $A = \sqrt{5} - 2\sqrt{7}$

Sachant que $2{,}236 \leq \sqrt{5} < 2{,}237$ et que $2{,}645 \leq \sqrt{7} < 2{,}646$,

a) Donne l'encadrement d'ordre 1 de A ;
b) Donne l'encadrement de A à 10^{-2} près.
c) Donne une valeur approchée à 0,001 près par excès de A.

Equation du 1er degré à deux inconnues dans IRxIR

I. DEFINITION D'UNE EQUATION DU 1ER DEGRE A DEUX INCONNUES

Une équation du 1er degré à deux inconnues peut se ramener sous la forme $ax + by = c$, a, b, c sont des réels ; x et y sont les inconnues.

Exemples : $2x - 3y = -1$; $x + y = 0$; $2a - 2b = 5$; … sont des équations du 1er degré à deux inconnues x, y et a, b.

II. VERIFIER SI UN COUPLE EST SOLUTION D'UNE EQUATION DU 1ER DEGRE A DEUX INCONNUES

Les solutions d'une équation du 1er degré à deux inconnues sont les couples (x ; y) ; (a ; b) ; ….

Un couple est solution d'une équation lorsqu'il vérifie cette équation.

On remplace x et y par leur valeur dans l'équation.

Activité 1

Consigne : Soit l'équation 3x - 2y + 6 = 0

Les couples (-1 ; 1,5) ; (2 ; 2) ; (-4 ; -3) ; (-5 ; -0,5) sont-ils solutions de l'équation donnée ?

III. COMMENT TROUVER DES COUPLES SOLUTIONS D'UNE EQUATION

Activité 2

Soit l'équation $3x - 2y + 6 = 0$.

Consigne 1 : Trouve deux couples solutions de l'équation donnée.

Consigne 2 : Détermine x ou y de manière que les couples suivants soient solutions de l'équation donnée :

(x ; 6) ; $(\frac{1}{3}; y)$; $(x; 0)$; $(0; y)$; $(x;\ \sqrt{2})$; (-2 ; y).

Consigne 3 : Exprime l'une des inconnues en fonction de l'autre.

Exemple de réponse

y en fonction de x	x en fonction de y

$3x - 2y + 6 = 0$	$3x - 2y + 6 = 0$
$-2y = -3x - 6$	$3x = 2y - 6$
$2y = 3x + 6$	
$y = \frac{3}{2}x + 3$	$x = \frac{2}{3}y - 2$
Dans ce cas $S = \{(x; y)\}$ *ou*	Dans ce cas $S = \{(x; y)\}$ *ou*
$S = \left\{\left(x; \frac{3}{2}x + 3\right) x \in \mathbb{R}\right\}$	$S = \left\{\left(\frac{2}{3}y - 2;\ y\right) y \in \mathbb{R}\right\}$

IV. REPRESENTATION GRAPHIQUE

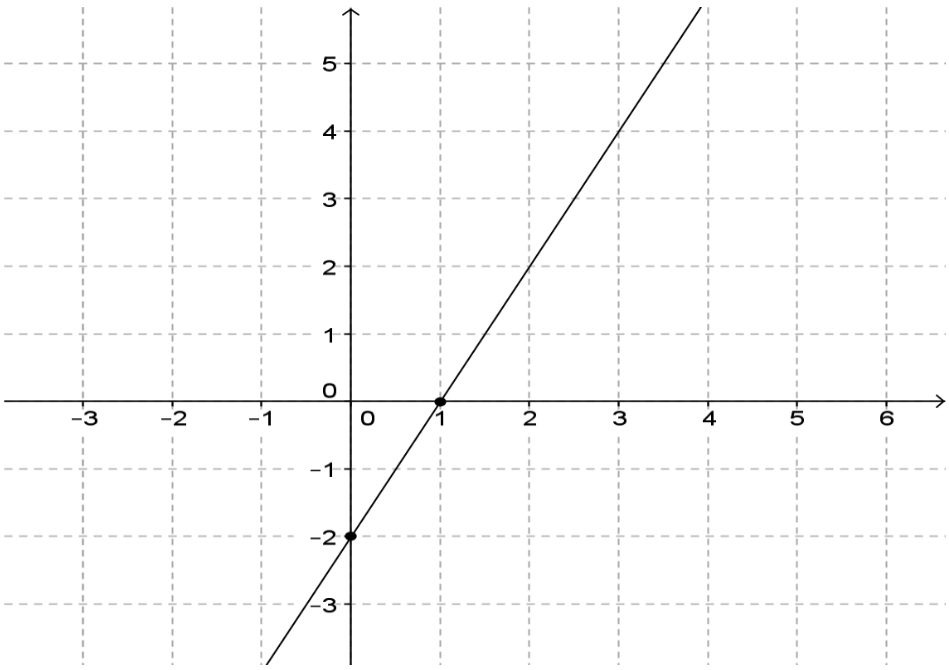
Pour représenter une équation du 1er degré à deux inconnues, il faut trouver deux couples solutions.

Dans un repère du plan, on place deux points dont les coordonnées sont les deux couples solutions de l'équation.

L'ensemble solution est représenté par la droite passant par ces deux points.

Exemple : Représentons graphiquement l'équation 2x – y = 2

Tableau des valeurs		
x	0	1
y	-2	0



Remarque : La représentation graphique d'une équation du 1er degré à deux inconnues est une droite. Une droite étant illimitée alors une équation du 1er degré à deux inconnues admet une infinité de solutions.

Activité 3

Soit l'équation $3x - 2y + 6 = 0$

Consigne : Dans un repère du plan, représente l'ensemble solution de l'équation donnée.

EXERCICES

1) On donne les équations :

$$\mathbf{5}\boldsymbol{x} - \mathbf{3}\boldsymbol{y} = \mathbf{2} \text{ (1) et } \mathbf{3}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \mathbf{5} \text{ (2)}$$

a) Parmi les couples suivants (-1 ; -8), (-3 ; -4), $\left(\frac{7}{2}; 2\right)$;

   $\left(1+\sqrt{5}; 3\sqrt{5}-2\right)$, quels sont ceux qui sont solutions de l'équation (1) ? De l'équation (2) ?

b) Détermine x ou y pour que les couples suivants soient solutions de l'équation (1) : (1 ; y), (2 ; y), $\left(x; \frac{1}{3}\right)$; $\left(x;\ \sqrt{2}\right)$.

c) Trouve m, n, t et z tels que les couples (m ; 5), (-3 ; n), (t ; 1), $(z;\ -1+\sqrt{2})$ soient solutions de l'équation (2).

2) On donne les équations

$$-x+2y=4 \quad (1) \qquad et\ \ 2x-y=1 \quad (2)$$

   Parmi les couples suivants : $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$; $(0: 1)$; $(1; 1)$; $\left(1; \frac{5}{2}\right)$; $(2;\ 3)$, quels sont ceux qui sont solution :

   a) de l'équation (1) ;
   b) de l'équation (2) ;
   c) à la fois des équations (1) et (2) ?

3) Un élève a deux notes sur 20 en mathématiques, l'une de l'interrogation (note x) l'autre de devoir (note y). on appelle moyenne pondérée de cet élève le nombre $m = \frac{3x+2y}{5}$ (on dit que x est affecté du coefficient 3 et y du coefficient 2).

a) Calcule la moyenne pondérée de Karim qui a eu 12 en interrogation et 13 en devoir.
b) Paul voudrait avoir 10 de moyenne pondérée. Il a eu 4 en devoir. Quelle note lui faut-il en interrogation ?
c) Mariam a eu comme moyenne pondérée 14. Sa note d'interrogation est 16. Quelle est sa note de devoir ?

Système de deux équations du 1er degré à deux inconnues dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

I. DEFINITIONS :

- Un système de deux équations du 1er degré à deux inconnues x et y est de la forme : $\begin{cases} \mathrm{ax} + \mathrm{by} = \mathrm{c} & (1) \\ \mathrm{a'x} + \mathrm{b'y} = \mathrm{c'} & (2) \end{cases}$ avec a, b, c, a', b', c' des réels.

  Cette représentation signifie $ax + by = c \ \ et \ a'x + b'y = c'$

- Le mot « **et** » signifie en même temps ou à la fois ou simultanément.

Ainsi l'accolade a valeur de et.

- Lorsqu'il y a deux inconnues dans un problème, il faut en général deux équations pour les déterminer.

II. RESOLUTION

Un système de deux équations du 1er degré à deux inconnues peut être résolu algébriquement ou graphiquement.

Un couple est solution du système lorsqu'il est à la fois solution des équations (1) et (2).

Si E_1 est l'ensemble solution de l'équation (1) et E_2 celui de l'équation (2) alors l'ensemble solution du système est S = $E_1 \cap E_2$

1. Résolution algébrique d'un système

Soit à résoudre le système $\begin{cases} 2x - y = 1 & (1) \\ -x + 2y = 4 & (2) \end{cases}$

Résolvons ce système par différentes méthodes :

1.1. Méthode par substitution

Règle : On exprime l'une des inconnues en fonction de l'autre dans une des équations, par exemple dans (1) et on le remplace par sa valeur dans (2).

$\begin{cases} 2x - y = 1 & (1) \\ -x + 2y = 4 & (2) \end{cases}$

- On exprime l'une des inconnues en fonction de l'autre.

Par exemple dans (1) : y = 2x - 1

- On remplace alors y par sa valeur dans (2), on obtient :

  -x + 2(2x – 1) = 4   ce qui conduit à x = 2

Donc $y = 2 \times 2 - 1$ $d'o$ù $y = 3$

L'ensemble solution du système est : $S = \{(2; 3)\}$

Activité 1

Consigne : Résous par cette méthode $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 4x - y = 2 \end{cases}$

Rép : $S = \{(1; 2)\}$

1.2. Méthode par élimination ou par addition

Règle : On choisit l'inconnue que l'on va « faire disparaitre », on multiplie chaque équation par un nombre de façon qu'en ajoutant les équations l'inconnue choisie « disparaisse » ; on résout l'équation à une inconnue obtenue.

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \quad (1) \\ -x + 2y = 4 \quad (2) \end{cases}$$

En choisissant de « faire disparaitre » y, on multiplie l'équation (1) par2 ainsi, on obtient :

$$\begin{cases} 4\mathrm{x} - 2\mathrm{y} = 2 \quad (1) \\ -\mathrm{x} + 2\mathrm{y} = 4 \quad (2) \end{cases}$$

En faisant la somme des deux équations, on obtient : 3x = 6 d'où x = 2

On choisit de « faire disparaitre » ensuite x, on multiplie l'équation (2) par2 ainsi, on obtient :

$$\begin{cases} 2\mathrm{x} - \mathrm{y} = 1 \quad (1) \\ -2\mathrm{x} + 4\mathrm{y} = 8 \quad (2) \end{cases}$$

En faisant la somme des deux équations, on obtient : 3y = 9 d'où y = 3

L'ensemble solution du système est : $S = \{(2; 3)\}$

Activité 2

Consigne Résous par cette méthode$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 4x - y = 2 \end{cases}$

1.3. Méthode par comparaison

Règle : On exprime l'une des inconnues en fonction de l'autre dans les deux équations puis on égalise les deux résultats ; on résout l'équation à une inconnue obtenue.

$$\begin{cases} 2x - y = 1 & (1) \\ -x + 2y = 4 & (2) \end{cases}$$

Dans (1) : $y = 2x - 1$

Dans (2) : $y = \frac{1}{2}x + 2$

Ainsi on a : $2x - 1 = \frac{1}{2}x + 2$ d'où x = 2 ; on fait de même pour trouver y.

$S = \{(2;3)\}$

Activité 3

Consigne : Résous par cette méthode $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 4x - y = 2 \end{cases}$

1.4. Méthode mixte : Elle consiste à déterminer une des inconnues par une méthode et l'autre inconnue par une autre méthode.

Activité 4

Consigne : Résous par cette méthode $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 4x - y = 2 \end{cases}$

2. Résolution graphique d'un système

Méthode : Dans un repère du plan, on trace la droite représentative de chacune des deux droites du système. La solution du système si elle existe est graphiquement le couple de coordonnées du point d'intersection des deux droites.

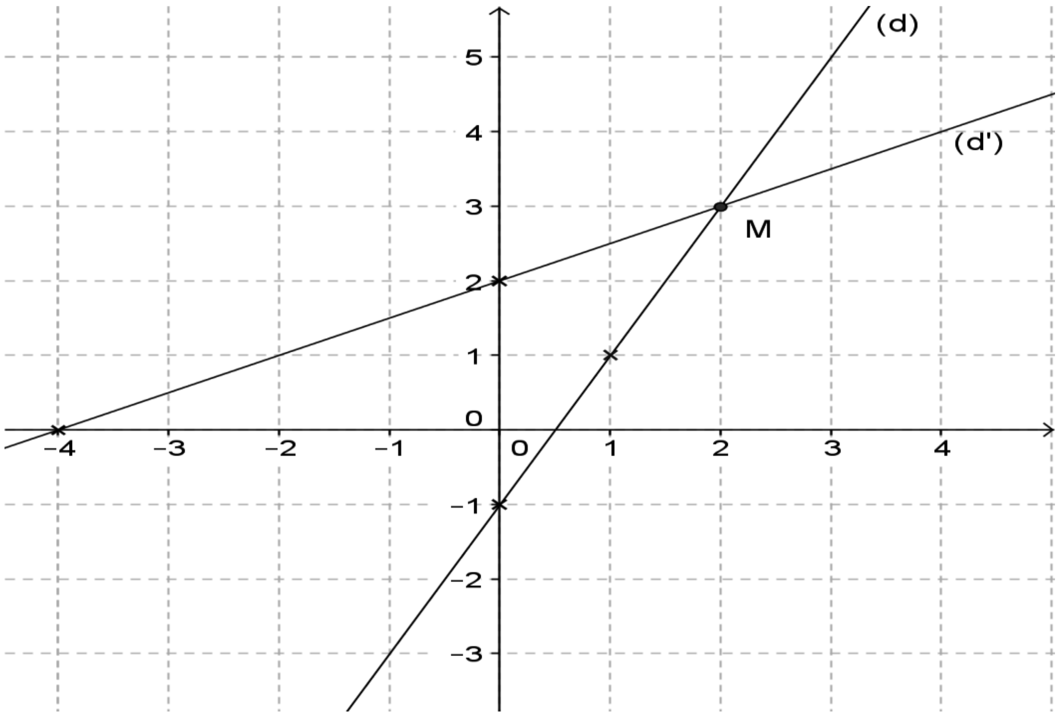
Exemple : Résolvons graphiquement le système

$$\begin{cases} 2x - y = 1 & (1) \\ -x + 2y = 4 & (2) \end{cases}$$

Soit : (d) : 2x – y = 1 et (d') : -x + 2y = 4

On trace les droites (d) et (d')

	$2x - y = 1$		$-x + 2y = 4$	
x	0	1	0	-4
y	-1	1	2	0



Graphiquement les droites (d) et (d’) se coupent en M (2 ; 3).

Donc S = {(2 ; 3)}

Activité 4

Consigne : Résous graphiquement le système suivant :

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \quad (1) \\ -x + 2y = 4 \quad (2) \end{cases}$$

III. UTILISATION DES SYSTEMES DE DEUX EQUATIONS POUR RESOUDRE DES PROBLEMES CONCRETS

Pour résoudre un problème ; il faut suivre les cinq (5) étapes suivantes :

1. Choix de l'inconnue et contraintes
2. Mise en équation : (C'est traduire l'énoncé par une équation)
3. Résolution de l'équation
4. Conclusion
5. Vérification

Exemple : Mon oncle possède des poules et des moutons. On compte 11 têtes et 30 pattes.

Détermine le nombre de poules et de moutons de mon oncle.

Exemple de résolution

Choix des inconnues et contraintes

Soit x le nombre de moutons et y le nombre de poules.

x et y sont des nombres naturels.

Mise en équation

On sait que :

Un mouton a une tête et une poule a une tête donc : $x + y = 11$

Un mouton a quatre pattes et une poule a deux pattes : $4x + 2y = 30$

On obtient ainsi le système :

$$\begin{cases} x + y = 11 \\ 4x + 2y = 30 \end{cases}$$

Résolution du système

L'ensemble solution du système est : $S = \{(4; 7)\}$

Conclusion

Mon oncle possède : 4 moutons et 7 poules.

Vérification

Les têtes : $4 + 7 = 11$ et Les pattes : $4 \times 4 + 2 \times 7 = 16 + 14 = 30$

Activité 5

Consigne : Une élève de 6ème Année fait des courses pour elle et ses camarades :

— la première fois, elle achète 5 crayons et 2 gommes pour 325F ;

— la seconde fois, elle achète 8 crayons et 3 gommes pour 500F.

En utilisant un système d'équations, aider l'élève de 6ème Année à retrouver le prix de chaque article.

IV. SYSTEMES PARTICULIERS

Activité 6

Consigne :

Résous graphiquement le système suivant. Que constates-tu ?

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$$

Résous algébriquement le même système et conclues.

Activité 7

Consigne :

Résous le système suivant. Que constates-tu ?

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases}$$

Résous algébriquement le même système et conclues.

Synthèse : Un système peut avoir, une solution unique, une infinité de solutions ou ne pas avoir de solution.

Si le système admet :

- une solution unique : les deux droites représentatives sont sécantes ;
- une infinité de solutions : les deux droites représentatives sont confondues ;
- pas de solution : les deux droites représentatives sont strictement parallèles.

EXERCICES

1) Résous les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x + 2y = 6 \end{cases} ; \begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases} ; \begin{cases} 0{,}6x + 0{,}3y - 3 = 0 \\ 8x + 4y - 2 = 0 \end{cases}$$

2) On considère le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ -2x + y = 9 \end{cases}$$

Soit E_1 l'ensemble des solutions de la première équation et E_2 l'ensemble des solutions de la deuxième équation.

a) Montre que $(4 ; -4) \in E_1$ et $(5 ; 3) \notin E_2$.

b) Détermine $E_1 \cap E_2$

3) Dans un plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les droites (D) et (L), d'équations respectives suivantes :

(D) : $3x + 2y - 4 = 0$

(L) : $2x - y + 9 = 0$

a) Détermine les coordonnées de leur point d'intersection A.

b) Construis (D) et (L).

4) On considère le système d'équations : $\begin{cases} 2x + 6y = -3 \\ 2x - 4y = -8 \end{cases}$

a) Résous le système.

b) Trace sur un même graphique dans un plan muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, les droites représentatives de chacune des équations du système.

c) Vérifie graphiquement les résultats de la première question.

5) x et y désignent des nombres réels.

On considère $A = (x - 1)(6y + x) - (x - 3)^2$

$B = 6xy + 2x - 9y - 9$

a) Développe et réduis A.

b) Montre que $A - B$ peut s'écrire $3(x + y)$.

c) Calcule la somme $x + y$ pour que $A - B$ soit égale à 15.

d) Résous le système : $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - 9y = -17{,}5 \end{cases}$

e) Calcule pour $x = \frac{5}{2}$ et $y = \frac{5}{2}$

- La somme x + y,
- La différence A – B,
- La valeur prise par B.

6) Deux entiers m et p sont tels que :

$m^2 - p^2 = 304$ et $m + p = 38$.

Calcule (m – p) puis m et p.

7) Un groupe d'élèves cotise pour faire un cadeau à un maître.

Si chacun versait 775F, alors il leur manquerait 375F. Mais si chacun d'eux versait 830F, alors il y aurait 450F en trop.

a) Détermine le nombre d'élèves du groupe et la valeur du cadeau.

b) Détermine ce que chacun doit verser.

8) Deux champs carrés ont pour côté x et y.

La somme des aires des deux champs est 1850 m^2.

On donne un champ rectangulaire de dimensions x et y, sa surface étant $xy = 875$ m^2.

a) Calcule le périmètre du rectangle.

b) Calcule la différence des côtés.

c) Calcul les dimensions du rectangle.

9) Au marché Binta a acheté des œufs à 50F l'unité. Sa fille très turbulente en casse 10. Elle revend le reste à 60F l'unité et réalise un bénéfice égal au dixième du prix d'achat des œufs.

a) Combien d'œufs Binta a-t-elle acheté ?

b) Quel est le bénéfice réalisé ?

Application linéaire

I. DEFINITION D'UNE APPLICATION LINEAIRE

Définition : On appelle application linéaire, toute relation du type $= \boldsymbol{ax}$ *ou* $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{ax}, a \in \mathbb{R}$.

x a pour image y ou f(x)

Exemples : $y = 2x$; $\mathbf{y} = \mathbf{x}\sqrt{\mathbf{2}}$; $g(x)= 1{,}7x$ **;** $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{-5}{2}\mathbf{x}$ sont des applications linéaires.

II. REPRESENTATION GRAPHIQUE

Activité 1

Soit l'application linéaire y= 2x ou f(x)= 2x.

Consigne 1 : Complète le tableau suivant :

Point	O	A	B	C
X	0	1		
y			-2	4

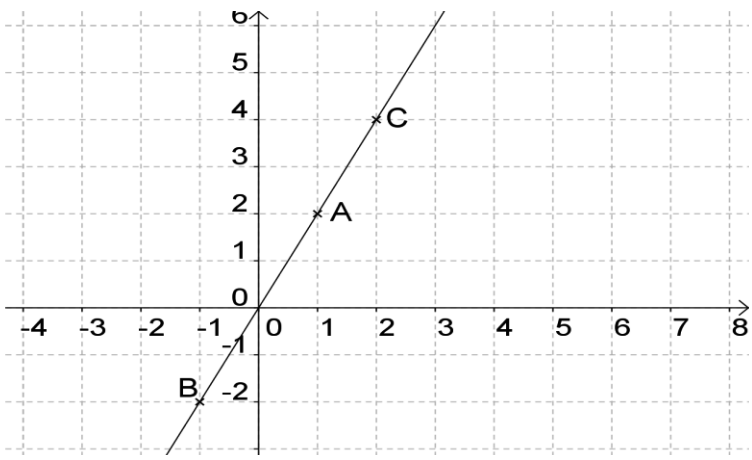
Consigne 2 : Place les points A, B, C dans un repère$(o; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$. Trace la droite (AC). Que constates-tu ?

Exemple de réponse

Consigne 1 : Complète le tableau suivant :

Point	O	A	B	C
X	0	1	-1	2
y	0	2	-2	4

Consigne 2 :



Constat : Les points O, A, B, C sont alignés.

Conclusion : La représentation graphique d'une application linéaire est une droite passant par l'origine du repère et le point de coordonnées (1 ; a).

a est le coefficient directeur de la droite.

Si le repère est orthonormé, a est appelé la **pente**.

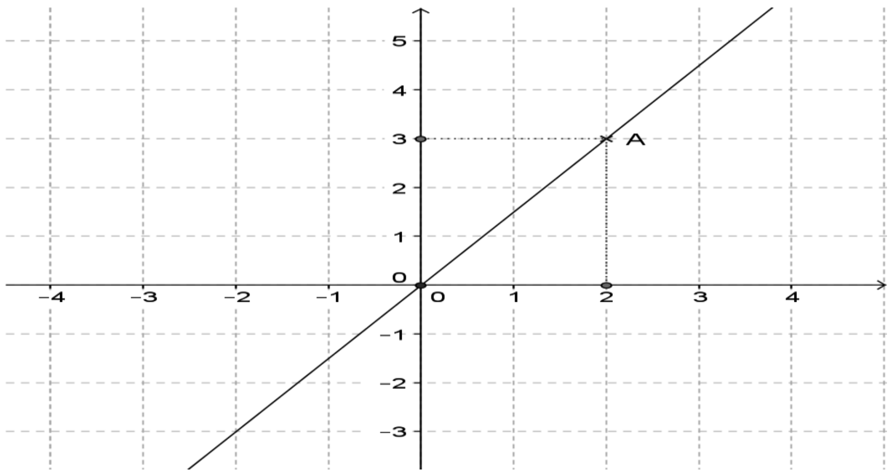
Consigne 3 : Représente graphiquement les applications linéaires suivantes : $y = -x$; $y = x$ et $y = \frac{5}{2}x$.

III. DETERMINATION D'UNE APPLICATION LINEAIRE

Déterminer une application linéaire y = ax, c'est trouver son coefficient directeur **a**.

Activité 2

Consigne 1 : Détermine la relation du type $\boldsymbol{y = ax}$ qui correspond au graphique ci-dessous.



Exemple de réponse

La droite passe parle point A(2 ; 3)ce qui correspond à :

Si $x = 2$ alors $y = 3$

$sachant\ que\ y = ax\quad on: 3 = 2a$;

$$alors\ a = \frac{3}{2}\ \ ainsi\ la\ relation\ est: y = \frac{3}{2}x$$

Consigne 2 : Détermine l'application linéaire f telle que f(2)= 4.

Rép : f(x)= 2x.

EXERCICES

1) Soit f une application linéaire ($f(x) = ax$)

   A l'aide du tableau suivant, détermine le coefficient a et complète le tableau.

x	2	6.10^{-3}	$-3\sqrt{5}$		
f(x)	$\frac{4}{3}$			$\frac{2}{\sqrt{2}+1}$	2^3

2) Trouve la relation du type $y = ax$ sachant que :
   a) Si x = -1 alors y = 1
   b) Si x = -1 alors y = 2
   c) Si x = 4 alors y = 2
3) Détermine les applications linéaires f, g,h et k telles que :

   $f(10) = 5$; $g\left(\sqrt{2}\right) = 2$; $h\left(\frac{3}{2}\right) = -1 =$; $k(-\frac{5}{3}) = \frac{1}{2}$.
4) Représente graphiquement chacune des applications linéaires suivantes :$f(x) = 4x$; $g(x) = -3x$; $h(x) = \frac{1}{2}x$.
5) La représentation d'une droite passe par l'origine du repère et le point de coordonnées (-5 ; -3). Quelle est l'application linéaire correspondante à cette droite ?
6) Un vidéo- club propose la formule suivante de location de cassettes :

   <u>Formule</u> : sans abonnement, 40F par cassette louée.

   a) Complète le tableau suivant après l'avoir reproduit.

x est le nombre de cassettes louées en un an	0	2	5	12
p(x) représente la dépense				

   b) Exprime p(x) en fonction de x. Précise la nature de p.
   c) Dans un repère orthonormé représente graphiquement l'applications p(on prendra 1 cm pour une cassette en abscisse et 1 cm 50F en ordonnée).

Système d'inéquations du 1er degré à une inconnue dans $\mathbb{R}$

I. INEQUATION DU 1ER DEGRE A UNE INCONNUE

Rappels :

Si $\mathbf{a} > b$ et m un réel positif alors $\mathbf{a.m} > b.m$

Si $\mathbf{a} > b$ et m un réel négatif alors $\mathbf{a.m} < b.m$

Activité 1

Consigne : Résous et interprète graphiquement l'ensemble solution des inéquations : $4x - 1 > x + 2$ et $2x + 2 > 3x + 5$

II. RESOLUTION D'UN SYSTEME D'INEQUATIONS DU 1ER DEGRE A UNE INCONNUE

Un système d'inéquations est composé de deux ou plusieurs inéquations du 1er degré à une inconnue.

Résolution : Pour résoudre un système d'inéquations, on résout séparément chacune des inéquations.

Les solutions du système sont des nombres qui sont à la fois solution des inéquations qui composent le système.

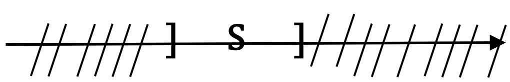
Exemple : Soit à résoudre le système : $\begin{cases} \mathbf{4x - 7 \leq 5} \\ \mathbf{3x - 8} < 5x - 4 \end{cases}$

Exemple de réponse

$\mathbf{4x - 7 \leq 5}$	$\mathbf{3x - 8} < 5x - 4$
$\mathbf{4x \leq 5 + 7}$	$\mathbf{3x - 5x} < -4 + \mathbf{8}$
$\mathbf{4x \leq 12}$	$-\mathbf{2x} < 4$
$\mathbf{x \leq 3}$	$\mathbf{x} > -2$
$\boldsymbol{S_1} = \{\boldsymbol{x/x} \in \mathbb{R}, \mathbf{x \leq 3}\}$	$\boldsymbol{S_2} = \{\boldsymbol{x/x} \in \mathbb{R}, \mathbf{x} > -2\}$

Ensemble solution du système :

$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S_1} \cap \boldsymbol{S_2} = \{\boldsymbol{x/x} \in \mathbb{R}, \mathbf{x \leq 3} \text{ et } \mathbf{x} > -2\}$

Représentation graphique : 

Activité 2

Consigne : Résous et interprète graphiquement l'ensemble solution du système : $\begin{cases} \mathbf{2 + x} < 6 - 3x \\ \mathbf{3(x + 1)} < x + \mathbf{4} \end{cases}$

III. INEQUATION SE RAMENANT A LA RESOLUTION DE SYSTEME

Rappels :

- Tout nombre positif est supérieur ou égal à 0 :

  Si x est positif alors $\boldsymbol{x} > 0$

- Tout nombre négatif est inférieur ou égal à 0 :

  Si x est négatif alors $\boldsymbol{x} \leq \mathbf{0}$

- Si $ab \geq 0$ alors $\begin{cases} \mathbf{a \geq 0} \\ \mathbf{b \geq 0} \end{cases}$ **ou** $\begin{cases} \mathbf{a \leq 0} \\ \mathbf{b \leq 0} \end{cases}$

- Si $ab \leq 0$ alors $\begin{cases} \mathbf{a \geq 0} \\ \mathbf{b \leq 0} \end{cases}$ **ou** $\begin{cases} \mathbf{a \leq 0} \\ \mathbf{b \geq 0} \end{cases}$

Exemple : Soit à résoudre l'inéquation : $(x - 2)(x + 3) \leq 0$

Il s'agit ici de trouver l'ensemble des nombres tels que le produit suivant (x – 2)(x + 3) soit négatif.

(x – 2)(x + 3) négatif si : $\begin{cases} \mathbf{x - 2 \geq 0} \\ \mathbf{x + 3 \leq 0} \end{cases} (\mathbf{1})$ **ou** $\begin{cases} \mathbf{x - 2 \leq 0} \\ \mathbf{x + 3 \geq 0} \end{cases} (\mathbf{2})$

$\mathbf{S_1} = \emptyset$; $\boldsymbol{S_2} = \{\boldsymbol{x}/\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \mathbf{x \leq 2 \text{ et } x \geq -3}\}$

Ensemble solution de l'inéquation est alors :

$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S_1} \cup \boldsymbol{S_2} = \{\boldsymbol{x}/\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \mathbf{x \leq 2 \text{ et } x \geq -3}\}$

Activité 3

Consigne : Résous l'inéquation : $(\mathbf{x} - \mathbf{1})(\mathbf{2x} + \mathbf{3}) > 0$

Exercices

1) Résous, dans $\mathbb{R}$, et interprète graphiquement l'ensemble solution des systèmes suivants :

$$\begin{cases} 3(4x-3) > 3x+4 \\ 4(x-4) > 3x-14 \end{cases} ; \begin{cases} 15x-2 > x+\dfrac{1}{3} \\ 4(x-4) < 3x-14 \end{cases} ; \begin{cases} 6x+\dfrac{5}{7} > 4x+7 \\ \dfrac{8x+2}{2} < 2x+25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8(x-2)+19 \geq \dfrac{15+8}{2} \\ 2(2x+3) \geq \dfrac{20x+2}{4} \end{cases} ; \begin{cases} \dfrac{x}{5} < \dfrac{x+1}{3} - 4 \\ \dfrac{x}{2} > \dfrac{3x}{4} + 1 \end{cases} ; \begin{cases} \dfrac{5}{12} - \dfrac{x}{8} < 2x + \dfrac{13}{6} \\ \dfrac{14}{15}x - 3 \leq \dfrac{1}{5}x - \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

2) La somme de quatre entiers consécutifs est plus grande que 2006. Que peut-on en déduire pour le plus petit de ces entiers ?

3) a) Quels sont les entiers dont le triple augmenté de dix est inférieur à quarante ?

   a) Quels sont les entiers dont le double diminué de quatre est supérieur à douze ?

   b) Est-il exact qu'un seul entier vérifie les deux conditions précédentes ?

Application affine

I. DEFINITION D'UNE APPLICATION AFFINE

Définition : On appelle application affine, toute relation du type

$\boldsymbol{y = ax + b}$ ***ou*** $\boldsymbol{f(x) = a\,x + b}$, *a et b sont des réels.*

x a pour image y ou $\boldsymbol{f(x)}$.

Exemples : $y = 2x + 7$; $y = x\sqrt{2} - 1$; $g(x) = 1{,}7x - 5$; $f(x) = \frac{-5}{2}x + 3$ sont des applications affines.

Activité 1

Soit l'application affine $y = 2x + 1$ ou $f(x) = 2x + 1$.

Consigne 1 : Complète le tableau suivant :

Points	O	A	B	C
x	0	1		
y			-2	4

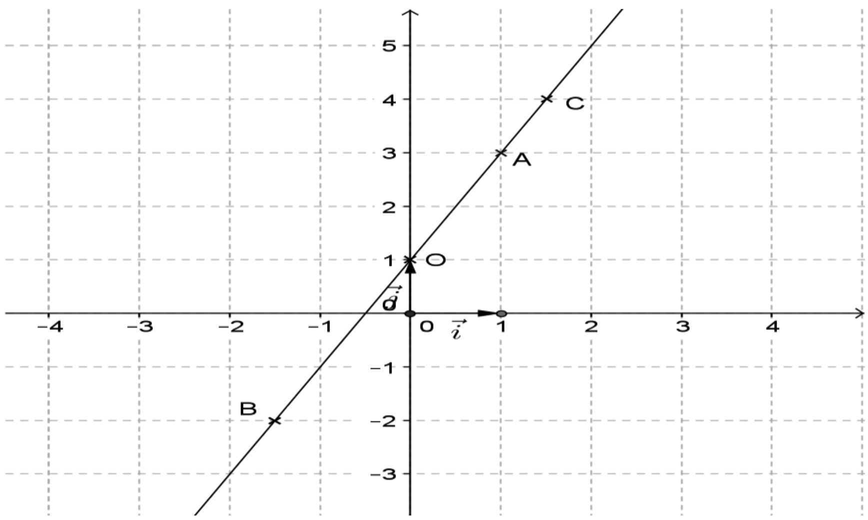
Consigne 2 : Représente les points A, B, C dans un repère$(o; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$. Trace la droite (AC). Que constates-tu ?

Exemple de réponse

Consigne 1

Points	O	A	B	C
x	0	1	-3/2	3/2
y	1	3	-2	4

Consigne 2



Constat : Les points O, A, B, C sont alignés.

Conclusion : La représentation graphique d'une application affine est une droite.

Le réel **a** est le coefficient directeur de la droite.

Si le repère est orthonormé, a est appelé la **pente**.

II. REPRESENTATION GRAPHIQUE

Activité 2

Consigne : Représente graphiquement les applications affines suivantes :

$\mathbf{y = -x + 1}$; $\mathbf{y = x - 1}$ et $\mathbf{y = \frac{5}{2}x - 2}$.

III. DETERMINATION D'UNE APPLICATION AFFINE

Déterminer une application affine $\boldsymbol{y = ax + b}$, c'est trouver les réels **a** et **b**.

Activité 3

1. **Méthode algébrique**

   Consigne : Détermine l'application affine f telle que :

   $f(2) = \ 1 \ et \ f(-2) = \ 3.$

   Exemple de réponse

   $f(x) = ax + b$

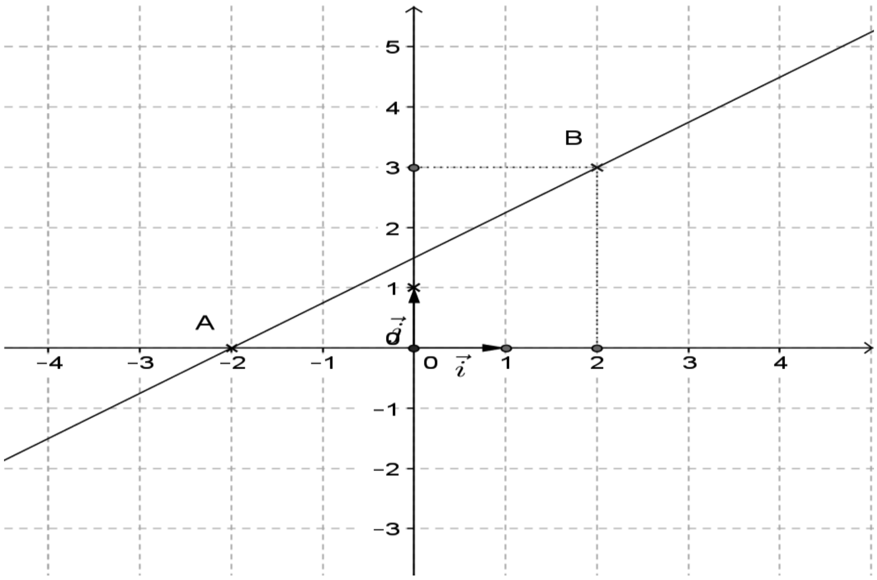
   $f(2) = 2a + b = 1 \quad et \ f(-2) = -a + b = 3$

   $On\ resout\ le\ système\ \begin{cases} 2a + b = 1 \\ -2a + b = 3 \end{cases}$

   $On\ trouve\ a = -\dfrac{1}{2}\ et\ b = 2\ \ ainsi\ \ f(x) = -\dfrac{1}{2}x + 2$

2. **Méthode graphique**

   Consigne : Détermine la relation du type $\boldsymbol{y = \ ax \ + \ b}$ qui correspond au graphique ci-dessous.



Exemple de réponse

La droite représentative de y = ax + b passe par les points A(-2 ;0) et B(2 ;3), ainsi

$pour\ x = -2\ \ alors\ y = 0 :\ \ 0 = -2a + b$

$pour\ x = 2\ alors\ y = 3 : 3 = 2a + b$

$On\ resout\ le\ système\ \begin{cases} 2a + b = 3 \\ -2a + b = 0 \end{cases}$

$On\ trouve\ a = \dfrac{3}{4}\ et\ b = \dfrac{3}{2}\ \ ainsi\ \ y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{3}{2}$

Exercices

1) Soient les applications f, g, h telles que :
   a) $f(3) = 4\ et\ f(-1) = 2$
   b) $g(\sqrt{2}) = 0\ et\ g(-\sqrt{2}) = 4$
   c) $h(1) = \sqrt{2}\ et\ h(3) = 0$
2) Dans les cas suivants, détermine la relation du type $y = ax + b$ sachant que :
   a) si x = 2 alors y = -3 et si x = -2 alors y = 1
   b) si x = 2 alors y = -5 et si x = -1 alors y = 1
   c) si x = 4 alors y = -1 et si x = -1 alors y = -3,5
3) Détermine l'application affine f telle que :
   F(2) = -5 et f(-1) = 1
   a) Trouve l'image de 2 par f.
   b) Trouve l'antécédent de -7 par f.
   c) Représente graphiquement l'application f.
4) Soit les points A(-1 ; -1), B(2 ; 2) et C(-1 ; 2).
   a) Détermine l'application affine dont la représentation graphique passe par les points A et B.
   b) Le point C appartient-il à cette représentation ?
5) Un vidéo- club propose deux formules de location de cassettes :
   Formule A : abonnement de un an pour 150F, ensuite 25F par cassette louée.
   Formule B : sans abonnement, 40F par cassette louée.
   a) Complète le tableau suivant après l'avoir reproduit.

x est le nombre de cassettes louées en un an	0	2	5	12
A(x) représente la dépense avec la formule A				
B(x) représente la dépense avec la formule B				

   b) Exprime A(x) et B(x) en fonction de x. Précise la nature de A et B.

c) Dans un repère orthonormé représente graphiquement les applications A et B(on prendra 1 cm pour une cassette en abscisse et 1 cm 50F en ordonnée).

d) Pour quel nombre de cassettes, le prix des formules A et B est-il le même ?

e) A partir de combien de cassettes la formule A devient-elle la plus avantageuse ?

6) On considère l'application polynôme, notée f_m qui associe à tout nombre réel x son image $f_m(x) = \frac{3m+x}{2} - \frac{mx-9}{6}$ ou m est un réel donné.

a) Montre que f_m est une application affine.

b) Détermine m pour que f_m soit une application linéaire. Soit g cette application.

c) Détermine m pour que f_m soit une application constante. Soit h cette application.

d) Détermine m pour que $f_m(3)$ soit nul. Soit i l'application obtenue.

e) Construis dans un repère orthonormé les représentations de g, h et i.

7) Détermine une application affine g dont la représentation graphique a pour coefficient directeur -2 et passe par le point de coordonnées (3 ; -3)

8) Soit l'application affine g définie par :

$$g(x) = ax \ + b \textit{ et telle que } g(4) = -13 \textit{ et } g(-9) = 52.$$

a) Calcule a et b.

b) Trouve les images de -3 ; 0,9 ; $\frac{4}{3}$ et de l'inverse de -5 par f.

c) Trouve antécédents des réels suivants par f : -8 ; $\sqrt{2}$; $\frac{2}{3}$; $(-2)^3$.

Inéquations et système d'inéquations du 1^{er} degré à deux inconnues dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

I. INEQUATIONS DU 1ER DEGRE A DEUX INCONNUES

1. Exemples : Les équations

$\mathbf{2x + 3y} < 5$; $y \geq 7x - 1$; $ax + by + c \leq 0$ sont des inéquations du premier degré à deux inconnues.

2. Théorème :

La droite d'équation $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$ partage le plan en deux demi-plans (régions) dans l'une $\mathbf{ax + by + c \leq 0}$ et dans l'autre $\mathbf{ax + by + c \geq 0}$.

3. Résolution :

Pratiquement, la résolution d'une inéquation du premier degré à deux inconnues est graphique.

Méthode : Pour résoudre l'inéquation $\mathbf{ax + by + c \leq 0}$,

- On trace la droite d'équation $\mathbf{ax + by + c = 0}$
- On vérifie pour un couple de l'une des deux régions
- Si le couple est solution, sa région est solution ; si le couple n'est pas solution, sa région n'est pas solution et on la hachure.

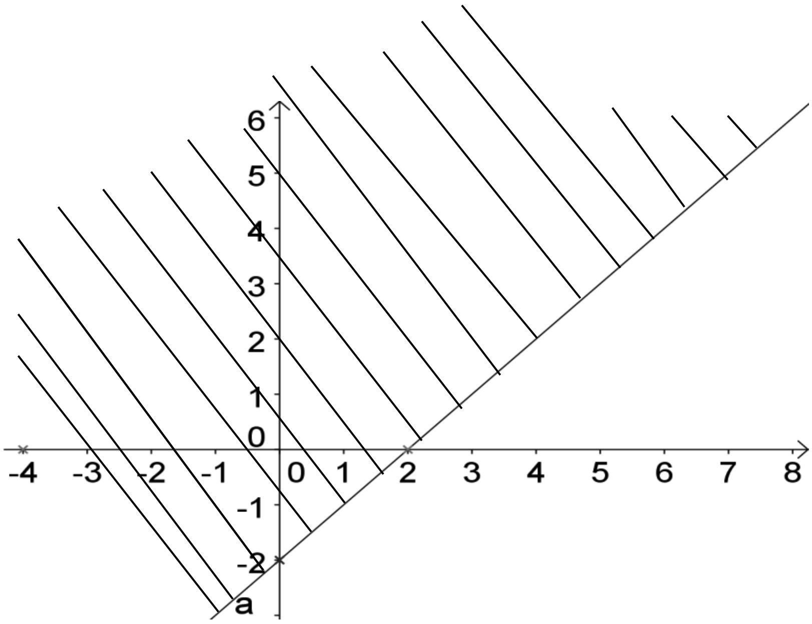
Exemple de résolution : Soit à résoudre l'inéquation : $\mathbf{x - y \geq 2}$

x – y = 2		
x	0	2
y	-2	0

Vérifions si le couple (0 ; 0) est solution

0 – 0 ≥ 2 fausse donc le couple (0 ; 0) n'est pas solution.

On hachure la région contenant l'origine (0 ; 0) du repère.



Activité

Consigne : Résous graphiquement, dans le même repère, les inéquations

$2x - 3y \geq 6$; $2x + y - 3 < 0$

II. SYSTEME D'INEQUATIONS DU 1ER DEGRE A DEUX INCONNUES

Un système d'inéquations du premier degré à deux inconnues est composé de deux ou plusieurs inéquations du premier degré à deux inconnues

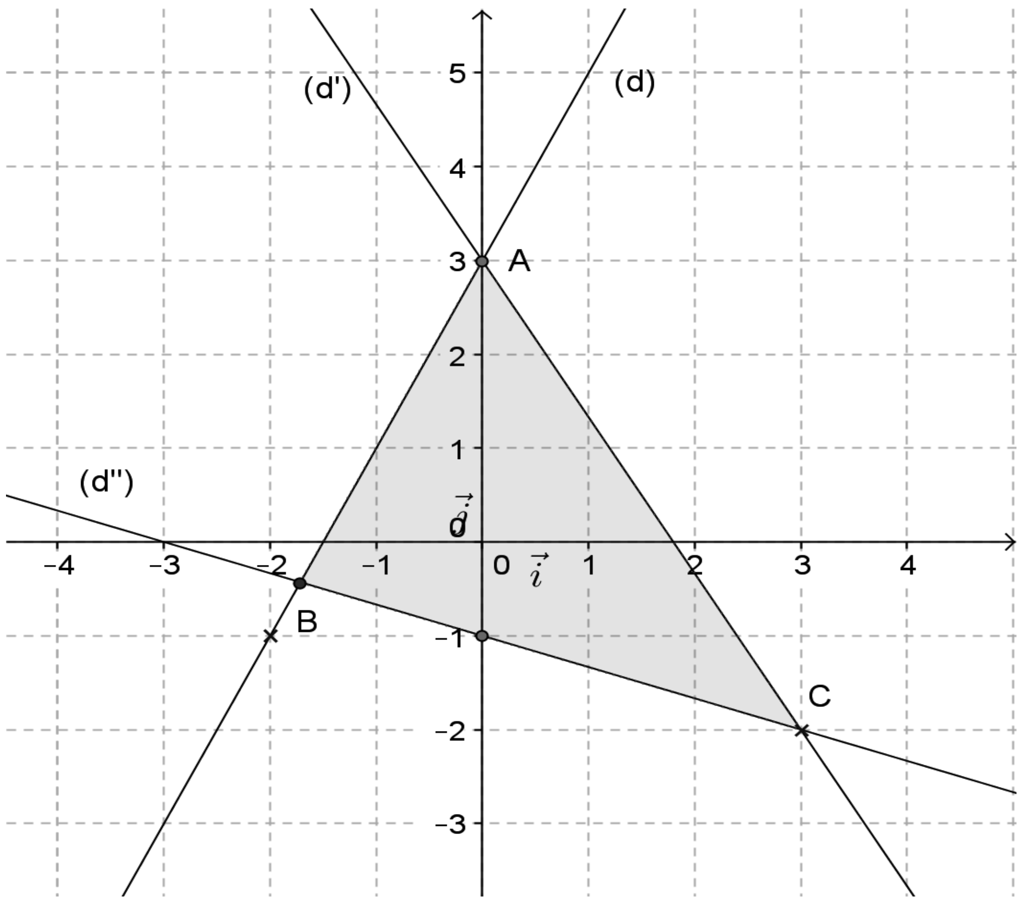
1. **Résolution :** Pour résoudre graphiquement un système d'inéquations du premier degré à deux inconnues, on résout graphiquement chacune des inéquations.

   L'ensemble solution du système est l'intersection des ensembles solutions des inéquations qui composent le système.

2. **Exemple de résolution :** Soit à résoudre graphiquement le système

   suivant : $\begin{cases} 2x - y + 3 \geq 0 & (1) \\ 5x + 3y - 9 \leq 0 & (2) \\ x + 3y + 3 \geq 0 & (3) \end{cases}$

	(d) : $2x - y + 3 = 0$		**(d') :** $5x + 3y - 9 = 0$		**(d'') :** $x + 3y + 3 = 0$	
x	0	-2	0	3	0	3
y	3	-1	3	-2	-1	-2



Le couple (0 ; 0) est solution de chacune des inéquations (1), (2) et (3).

Soit (**d)** $\cap$(d’) **= {A} (d** $\cap$**(d’’) = {B} (d’)** $\cap$**(d’’) = {C}**

L’ensemble solution du système est S, la partie du plan limité par le triangle ABC.

Exercices

1) Résous graphiquement les inéquations et indique trois solutions à titre d'exemple.

   a) $8x - 4y + 3 \geq 2x - 14y$; $\quad c)\ (2x + y) - (x - 3y + 1) \leq x + y$

   b) $(4x - 5) - (2y + x) \leq 3x + y + 2$; $\quad d)\ \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+1} \geq \frac{4}{x-2}$

2) Résous graphiquement les systèmes et indique trois solutions à titre d'exemple.

   $\begin{cases} 5x + 3y + 2 \geq 0 \\ 7x + 4y + 4 \leq \end{cases}$; $\qquad \begin{cases} 4x - 3y \leq 4 \\ 5x - 4y \geq 1 \end{cases}$;

   $\begin{cases} \dfrac{x - 2y}{3} \leq 4 - 2y \\ 4x+\geq \dfrac{x - y}{2} \end{cases}$; $\qquad \begin{cases} 5x + 4y - 10 \leq 0 \\ 2x + 2y - 3 \leq 0 \\ 4x + 2y - 5 \geq 0 \end{cases}$

3) Résous graphiquement l'inéquation et le système suivants :

$2x - 4y > -8$; $\quad \begin{cases} 2x + y > 5 \\ x - 3y > 6 \end{cases}$

Application affine par morceaux (ou par intervalles)

I. COÏNCIDENCE SUR UNE PARTIE DE $\mathbb{R}$

Deux applications **f** et **g** coïncident sur une partie I de $\mathbb{R}$ lorsque pour tout **x** élément de I**,** $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$.

II. DEFINITION

On appelle application affine par morceaux (ou par intervalles), toute application qui coïncide sur des parties de $\mathbb{R}$avec des applications affines.

Exemples

L'application f définie par : f(x) = |x| ou $\begin{cases} si\ x \geq 0,\ f(x) = x \\ si\ x \leq 0,\ f(x) = -x \end{cases}$;

L'application g définie par : $\begin{cases} si\ x \leq 2, g(x) = -x \\ si\ x > 2, g(x) = 0{,}5 \end{cases}$; et

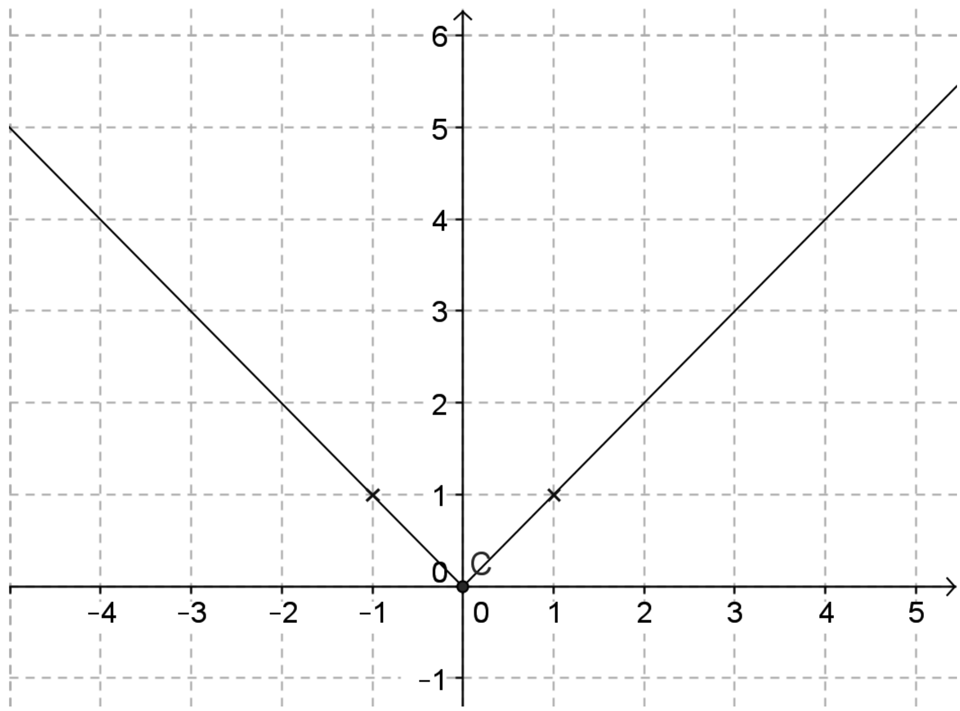
L'application h définie par : $\begin{cases} si - 2 \leq x \leq 3,\ h(x) = 2x - 1 \\ si\ 3 \leq x \leq 4,\ h(x) = 3x \\ si 4 \leq x \leq 6,\ h(x) = -2 \end{cases}$ sont des exemples d'applications affines par morceaux.

III. REPRESENTATION GRAPHIQUE D'APPLICATIONS AFFINE PAR MORCEAUX

Exemple de représentation : soit à représenter L'application f définie par : **f(x) = |x|** ou $\begin{cases} \mathbf{si\ x \geq 0, f(x) = x} \\ \mathbf{si\ x \leq 0, f(x) = -x} \end{cases}$

On représente les droites d'équations respectives $y = x\ et\ y = -x$.

La représentation de f est la réunion des deux demi-droites vérifiant les expressions de f.



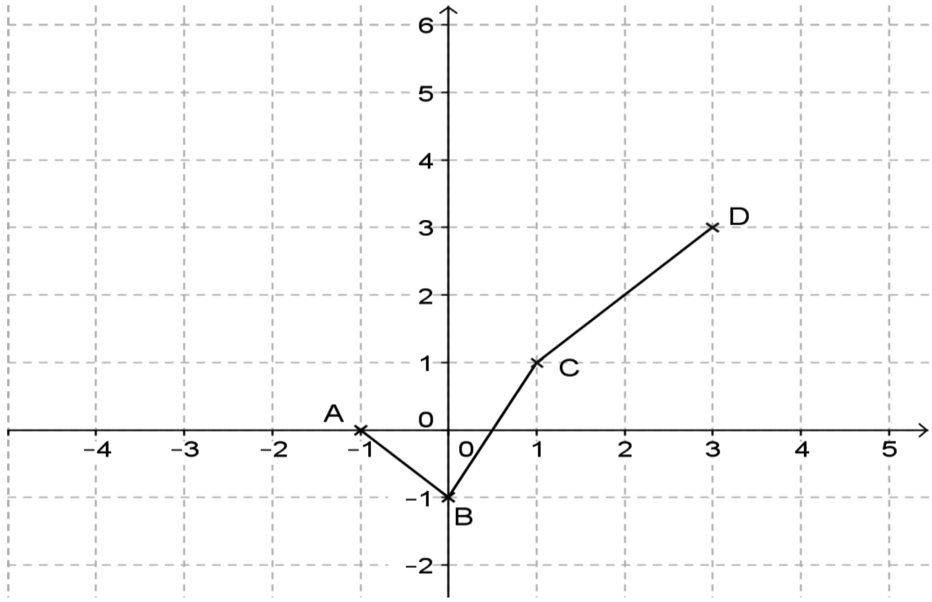
Activité

Consigne : Représente l'application h définie par :

$$\begin{cases} si\ -2 \leq x \leq 0,\ h(x) = 2x - 1 \\ si\ \ 0 \leq x \leq 1,\ h(x) = 3x \\ si\ \ 1 \leq x \leq 4,\ h(x) = -2 \end{cases}$$

IV. DETERMINATION D'UNE APPLICATION AFFINE PAR MORCEAUX

Exemple : Définir à l'aide de formules appropriées l'application p représentée par le graphe suivant :



D'après le graphique :

Pour $x \leq 0$, p coïncide avec la droite (AB)

Pour $0 \leq x \leq 1$, p coïncide avec la droite (BC)

Pour $1 \leq x \leq 3$, p coïncide avec la droite (CD)

Il s'agit de trouver les applications affines correspondantes aux droites (AB), (BC) et (CD)

D'après le graphique :

A(-1 ;0), B(0 ;-1) C(1 ;1) et D(3 ;3)

L'application p est définie par : $\begin{cases} si\ x \leq 0,\ p(x) = -x - 1 \\ si\ 0 \leq x \leq 1,\ p(x) = 2x - 1 \\ si\ 1 \leq x \leq 3,\ p(x) = x \end{cases}$

Exercices

1) Représente graphiquement les applications affines par morceaux suivantes :

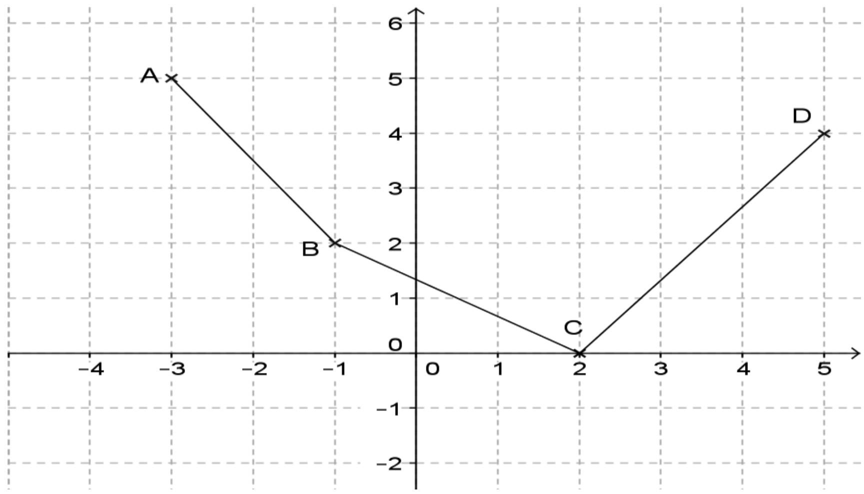
a) $\begin{cases} si\ -2 \leq x < 0, & f(x) = 1 \\ si\ 0 \leq x < 2, & f(x) = x - 1 \\ si\ 2 \leq x < 3, & f(x) = 2x - 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} si\ x \leq -1, & g(x) = 2 \\ si - 1 < x \leq 1, & g(x) = -2x \\ si\ x \geq 1, & g(x) = -2 \end{cases}$

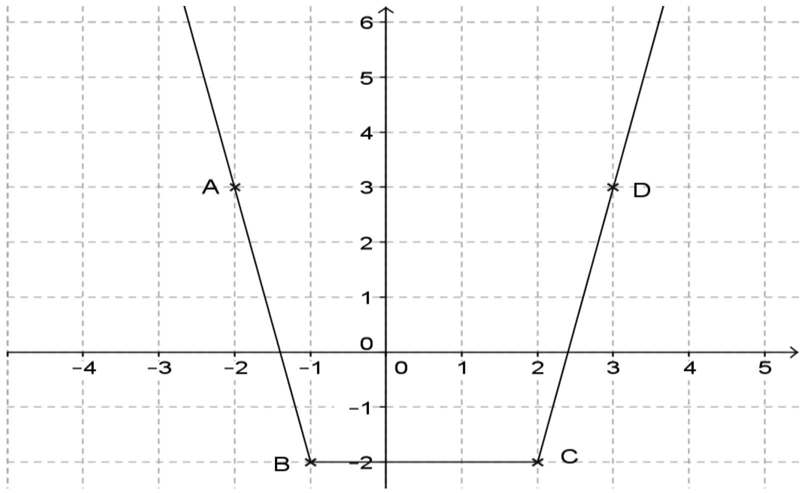
c) $\begin{cases} si\ 0 \leq x < 1, & h(x) = x \\ 1 \leq x < 2, & h(x) = 1 \\ 2 \leq x < 3, & h(x) = x - 2 \\ 3 \leq x < 4, & h(x) = 1 \end{cases}$

2) Détermine les applications affines par morceaux dont les représentations graphiques sont les suivants :

a)



b)



3) Soient f et g les applications affines définies par :

$$f(x) = \frac{x}{2} + 3; \quad g(x) = -2x + 3$$

a) Représente graphiquement dans un repère orthonormé les applications f et g.

b) Soit h l'application affine par intervalles définie par :

$$\begin{cases} h(x) = \dfrac{x}{2} + 3 \; lorsque \; x \; est \; strictement \; négatif \\ h(x) = -2x + 3 \; lorsque \; x \; est \; positif \end{cases}$$

c) Résous graphiquement les équations :

$$h(x) = 4 \;\; et \; h(x) = -1$$

Application polynôme

I. DEFINITIONS ET EXEMPLES

Poly = plusieurs ; ***nôme*** = terme

Définition : Une application polynôme à une variable x peut s'écrire sous la forme : $\boldsymbol{f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}$

- **x** est la **variable.**
- Les réels$\boldsymbol{a_n x^n}$, $\boldsymbol{a_{n-1}x^{n-1}}$, … $et\boldsymbol{a_0}$sont les **coefficients.**
- Chaque terme est un **monôme.**

Exemples :

$A(x) = 16x^4 - 24x^3 + 40x^2$; $B(x) = 18x^7 + 27x^5 - 36x^3$;

$C(x) = 5x^2 + 4x - 7$

- **Degré d'un polynôme :** C'est le plus grand exposant de la variable dont le coefficient n'est pas zéro.
- **Ordonner un polynôme :** Un polynôme peut être ordonné suivant les puissances croissantes de la variable x ou suivant les puissances décroissantes de la variable x.

Exemple : Soit le polynôme $f(x) = 2x + 5x^3 - 7 - x^2$

Ce polynôme peut s'écrire :

$f(x) = 5x^3 - x^2 + 2x - 7$ (puissances décroissantes de x)

$f(x) = -7 + 2x - x^2 + 5x^3$ (puissances croissantes de x)

Activité 1

Consigne 1 : Complète le tableau suivant :

Polynôme	Degré
$f(x) = 2x - 7$	
$f(x) = 5x^3 - 7$	
$f(x) = -x^5$	
$f(x) = -7$	
$f(x) = 0$	

Consigne 2 : Soit $g(x) = 5x^0 - 3x + 9x^2 - x^4$

Ordonne g(x) suivant les puissances croissantes de x puis g(x) suivant les puissances décroissantes de x.

II. VALEUR NUMERIQUE (OU IMAGE) D'UN POLYNOME

L'écriture f(x) signifie l'image de x par f.

Pour trouver f(a), on remplace x par a dans l'expression de f(x).

Activité 2

Consigne : Soit $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$

1) Donne le degré de f(x).
2) Calcule : f(0), f(1), f(5), f(-3), $f\left(\frac{3}{2}\right)$, $f(\sqrt{2})$ puis écris les résultats dans le tableau suivant

x	0	1	5	-3	$\frac{3}{2}$	$\sqrt{2}$
f(x)						

III. DEVELOPPER, REDUIRE ET ORDONNER UN POLYNOME

Pour tous nombres réels a, b, m et k, on développe :

- $k(a + b) = ka + kb$
- $k(a - b) = ka - kb$
- $(a + m)(b + k) = ab + ka + mb + mk$
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Activité 3

Consigne : Développe, réduis et ordonne les polynômes suivant les puissances croissantes de x : $A(x) = -2x + (3x - 2) - (3 + 7x - 5x^2)$

$B(x) = 8 - 4x(7x - 3) + (7x - 2)(5x + 3)$

$C(x) = 3(x - 1)(x - 2)(x + 2) - (x - 1)(x^2 + 1)$

$D(x) = (2x + 3)^2 - (x - 5)^2 + (4x + 5)(4x - 5)$

IV. OPERATIONS SUR LES POLYNOMES

Activité 4

Soit les polynômes :

$A(x) = x^2 + x - 20$; $B(x) = x^2 - x - 12$; $f(x) = 2x$;

$g(x) = 3x + 1$;

Consigne 1: Calcule $A(x) + B(x)$; $A(x) - B(x)$; $A(x) \times B(x)$.

Consigne 2: Calcule $f(x) - g(x)$; $\frac{2}{3}.\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \frac{3}{2}.\mathbf{f}(\mathbf{x})$

V. FACTORISATION DES POLYNOMES

Factoriser, c'est transformer une somme en un produit.

On factorise par :

- la mise en facteur d'un facteur commun (apparent ou caché)
- l'utilisation des produits remarquables.

Activité 5

Consigne 1: Factorise les polynômes suivants

$A(x) = 16x^3 -+24x^2 + 40x$; $B(x) = 18x^5 + 27x^3 - 36x^2$.

Consigne 2: Ecris sous forme de produits de facteurs du 1er degré

$f(x) = 2(2x - 5)(4 - 2x) + (3 + 5x)(2x - 5)$

$g(x) = (2x - 1)(3x - 2) - (2x - 1)(4x - 1)$

$h(x) = 2(7 - 3x)(4 + x) - 5(3 - 2x)(4 + x) + (4 + x)$

Consigne 3: Factorise

$F(x) = (2x - 1)(3x - 2) + (1 - 2x)(4x - 1)$

$G(x) = (4x - 6)(x + 2) - (1 - x)(6x - 9) - 10x + 15$

$H(x) = (3x - 1)(2x + 1) + (x - \frac{1}{3})(5x + 3)$

Consigne 4: Factorise

$9x^2 + 30x + 25$; $\mathbf{x^2} - \frac{1}{9}$; $8x^2 - 18$

$A(x) = x^2 - 4 - (x - 2)(2x - 7)$; $B(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

VI. RESOLUTION DE CERTAINES EQUATIONS DE DEGRE SUPERIEUR A 1

Un polynôme peut s'écrire sous une forme développée ou sous une forme factorisée. L'une ou l'autre de ces formes peut être utilisé pour résoudre une équation.

On utilise souvent la propriété :

« Un produit de facteurs est nul si l'un au moins des facteurs est nul »

Exemple de résolution : Résous dans chacun des ensembles suivants $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}$, **et** $\mathbb{R}$ l'équation $(x - 2)(3x - 1)(2x + 1) = 0$

Les valeurs possibles de x : $\mathbf{2}; \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}; -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

Dans $\mathbb{N}, \boldsymbol{S} = \{\mathbf{2}\}\mathbf{car}\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \notin \mathbb{N}\ \mathbf{et} -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \notin \mathbb{N}$

Dans $\mathbb{Z}$, $\mathbf{S} = \{\mathbf{2}\}$ car $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \notin \mathbb{Z}$ et $-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \notin \mathbb{Z}$

Dans $\mathbb{D}$, $S = \left\{2\ ;\ \frac{1}{2}\right\}\ car\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \notin \mathbb{D}$

Dans$\mathbb{R}$, $\mathbf{S} = \left\{\mathbf{2};\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}; -\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right\}$

Activité 6

On donne les polynômes

$f(x) = (x + 1)(x - 3)$ et $g(x) = (x - 3)(3x - 2)$

Consigne 1 : Développe, réduit et ordonne f(x) et g(x) suivant les puissances décroissantes de x.

Consigne 2 : résous dans IR les équations :

a) $f(x) = 0$ c) $f(x) = -4$

b) $f(x) = -3$ d) $f(x) = g(x)$

Exercices

1) On considère deux applications polynômes g et h telles que :

   $f(x) = 2x^2 - 9x + 9$ et $g(x) = 2x^2 - 7x + 5$.

   Calcule $f(x) + g(x)$; $f(x) - g(x)$ et $f(x) \times g(x)$

2) On te donne l'application polynôme f définie par :

   $f(x) = (x - 3)(2x + 5) + x^2 - 9$

a) Développe, réduis et ordonne f(x) suivant les puissances décroissantes de x.

b) Calcule f(-3) et f(3)

c) Factorise f(x).

d) Résous dans R les équations : $f(x) = -24$ et $f(x) = 0$

3) On considère la fonction f définie par : $f(x) = 4x^3 + 3x^2 + ax + b$

   a. Détermine les réels a et b sachant que $f(1) = 0$ et $f(-2) = -15$.

   b. Ecris f(x) sous la forme d'un produit de polynômes du premier degré.

   c. Résous dans N l'équation $f(x) = 0$.

4) On donne deux applications polynôme f et g définies par :

$f(x) = (2x + 1)^2 - (x - 7)^2$; $g(x) = (x + 8)(2x + 1) + x^2 + 16x + 64$.

   a) Développe, réduis et ordonne f(x) et g(x) suivant les puissances croissantes de x.

   b) Factorise f(x) et g(x).

   c) Résous les équations : $f(x) = 0$ et $f(x) = g(x)$.

   d) Calcule $f(2\sqrt{5})$ *et* $\frac{1}{12} f(2\sqrt{5})$ sachant que $2{,}236 \leq \sqrt{5} < 2{,}237$, donne un encadrement de $\frac{1}{12} f(2\sqrt{5})$ puis en déduis l'encadrement d'ordre 1 de $\frac{1}{12} f(2\sqrt{5})$.

5) Factorise les polynômes suivants :

   $A(x) = 16x^4 - 24x^3 + 40x^2$;

   $B(x) = 18x^7 + 27x^5 - 36x^3$;

$C(x) = (3x + 2)^2 – (2x + 3)^2$

$D(x) = (9x^2 – 1)(2x + 3) – (4x^2 – 9)(3x + 1)$

$E(x) = (x^2 – 4)(3x - 1) – (9x^2 – 1)(x + 2)$

6) On considère les polynômes suivants :

$f(x) = \frac{1}{4}(x+1)^2 \;\; et \;\; g(x) = \frac{1}{6}(x+1)[(x+1)^2 - 7x - 7].$

a) Factorise g(x).

b) Calcule $f(\sqrt{5})$.

c) Développe $(\sqrt{5}+1)^2 \;\; et \; (\sqrt{5}-1)^2$. en déduis une expression plus simple de $A = \sqrt{6+2\sqrt{5}} \;\; et \; B = \sqrt{6-2\sqrt{5}}$ puis vérifie que $f(\sqrt{5}) = \frac{A}{B}$

7) On considère les 3 fonctions polynômes $f, g \; et \; h$ de IR dans IR définis par $f(x) = (2x-5)^2 - (x-3)^2$

$g(x) = (x+3)(x-2) - h(x)$

$h(x) = ax^2 + bx + c$

a) Détermine les réels a, b et c sachant que

$h(0) = -4 \,; h(2) = 0 \; et \; h(-2) = -16$

Ecris alors $h(x)$

b) Développe réduis et ordonné $f(x)$ et $g(x)$

c) Ecris $f(x)$ et $g(x)$ sous forme de produit de facteurs.

d) Résous dans IR les équations $g(x) = 0$; $g(x) = -2$

8) Soient deux applications $f \; et \; g$ définies par

a) $f(x) = 9x^2 - 1 + (-6x+2)(x+1) - (2x-3)(3x-1)$

b) $g(x) = (x-2)^2 - (4x-8)(x+2) + x^2 - 4x + 4$

c) Développe, réduis et ordonne $f(x) \; et \; g(x)$ suivant les puissances décroissantes de x.

d) Calcule: $f(x) + g(x)$;$f(x) - g(x)$; $f(x) \times g(x)$.

e) Factorise $f(x)$ et $g(x)$

f) Résous dans IR les équations $f(x) = 0$ et $f(x) = g(x)$

9) On considère l'application polynôme f et IR vers IR définie par

$f(x) = (3x+2)^2 - (2x-5)^2$

a) Développe réduis et ordonne $f(x)$ selon les puissants décroissantes de x.

b) Factorise $f(x)$

c) Détermine l'ensemble des réels x vérifiant $f(x) \geq 5x^2 + 3$

d) Calcule $f(\sqrt{2})$

d) Sachant que $1{,}414 \leq \sqrt{2} < 1{,}415$ donne un encadrement de $f(\sqrt{2})$à 10^{-2} près.

10) Soient f et g deux applications telles que :

$f(x) = x^2 + x - 6$ et $g(x) = x^2 - 3x + 2$

a) Calcule f(x) + g(x) ; f(x) - g(x) ; f(x) × g(x).

b) Trouve deux applications f_1 et g_1 telles que :

$f(x) = f_1(x) + x - 2$

$g(x) = g_1(x) + x - 2$

c) En déduis les éléments des ensembles suivants :

$F = \{x/x \in R, f(x) = 0\}$; $G = \{x/x \in R, g(x) = 0\}$

$E = \{x/x \in R, f(x) = 0 \text{ et } g(x) = 0\}$

11) On donne les polynômes $A(x) = 36x^2 - 49 - 3(x-1)(6x-7)$

$B = (3-2x)(x+7) + (9 + 12x + 4x^2)$

a) Développe, réduis et ordonne A(x) et B(x).

b) Factorise A(x) et B(x).

c) Vérifie les résultats précédentes en calculant à chaque fois A(x) et B(x) pour x = 1 et x = -1.

d) Soit C(x)= A(x) – B(x). Développe C(x) et factorise C(x).

Fonction « Fraction rationnelle»

I. DEFINITIONS

1. **Définition :** Soient f et g deux fonctions polynômes avec g non nulle. La fonction numérique q : $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)} \end{cases}$ est appelée une fonction ou fraction rationnelle.

2. **Ensemble de définition :** On appelle ensemble de définition (ou domaine de définition) d'une fonction rationnelle q, l'ensemble des valeurs pour lesquelles le calcul est possible. Ce sont des valeurs pour lesquelles le dénominateur est différent de zéro.
On note D_q l'ensemble de définition de q.

3. **Exemple :**

- $h(x) = \frac{x+2}{x^2+1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \neq 0$ $\mathcal{D}_h = \mathbb{R}$
- $r(x) = \frac{1}{x}$ $\mathcal{D}_r = \mathbb{R} - \{0\}$ ou $\mathcal{D}_r = \mathbb{R}^*$
- $q(x) = \frac{x^2-2x+3}{x^2-1}$

$$x^2 - 1 \neq 0 \iff (x+1)(x-1) \neq 0 \ si \begin{cases} x + 1 \neq 0 \\ et \\ x - 1 \neq 0 \end{cases} \iff x \neq -1 \text{ et } x \neq 1$$

$\mathcal{D}_q = \mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$

Activité 1

Consigne :

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$H(x) = \frac{(x+1)(5x-8)}{(5x-8)(x-4)}; R(x) = \frac{3x^2-2x-1}{2x^2+5}; \ g(x) = \frac{x+1}{x+3}$$

II. SIMPLIFICATION D'UNE FRACTION RATIONNELLE

Avant toute simplification, il faut donner l'ensemble de définition d'une fonction rationnelle.

On simplifie une fonction dans son domaine de définition.

Exemple : Soit à simplifier $H(x) = \frac{(x+1)(5x-8)}{(5x-8)(x-4)}$

$\mathcal{D}_H = \mathbb{R} - \{\frac{8}{5} ; 4\}$

$H(x) = \frac{(x+1)(5x-8)}{(5x-8)(x-4)}$, on simplifie par (5x – 8) en écrivant :

Pour tout x ∈ $\boldsymbol{\mathcal{D}}_H$: $H(x) = \frac{x+1}{x-4}$

Remarque :

$$Les\ fonctions\ H(x) = \frac{(x+1)(5x-8)}{(5x-8)(x-4)}\ \ et\ H'(x) = \frac{x+1}{x-4}$$

($\mathcal{D}_{H'} = \mathbb{R}$ - { 4}), n'ont pas même ensemble de définition mais dans

$\boldsymbol{\mathcal{D}}_H \cap \mathcal{D}_{H'} = \mathbb{R} - \{\frac{8}{4} ; 4\}$, H(x) = H'(x)

Activité 2

Consigne : On donne les polynômes $f(x) = (3x + 2)^2 - (2x + 3)^2$ et $g(x) = x^2 - 2x + 1$. Simplifie les fonctions rationnelles :

$$h(x) = \frac{9x^2 - 16}{9x^2 - 24x + 16} ; q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

III. RESOLUTION D'EQUATIONS

f(x) et g(x) étant deux polynômes.

Pour résoudre les équations du type $\frac{\mathbf{f(x)}}{\mathbf{g(x)}} = \mathbf{0}$; $\frac{\mathbf{f(x)}}{\mathbf{g(x)}} = \mathbf{1}$;

$\frac{\mathbf{f(x)}}{\mathbf{g(x)}} = \mathbf{a}$ et $\frac{\mathbf{f(x)}}{\mathbf{g(x)}} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$**,** il est préférable d'utiliser la forme simplifiée de $\frac{\mathbf{f(x)}}{\mathbf{g(x)}}$.

Activité 3

Consigne : Soit $\mathbf{q(x)} = \frac{\mathbf{5(x+1)(x-1)}}{\mathbf{(x-1)^2}}$

Résous dans $\mathbb{R}$ les équations **q(x) = 0 ; q(x) = 1 ; q(x) =** $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$

Exemple de réponse

$\mathbf{q(x)} = \frac{\mathbf{5(x+1)(x-1)}}{\mathbf{(x-1)^2}}$ $\mathcal{D}_q = \mathbb{R}$ - $\{1\}$.

Pour tout x ∈ $\mathcal{D}_q$: $\mathbf{q(x)} = \frac{\mathbf{5x+5}}{\mathbf{x-1}}$

$Q(x) = 0$ *équivaut* à $\dfrac{5x+5}{x-1} = 0$ *équivaut* à $5x + 5 = 0$

$alors\ x = -1 \in \boldsymbol{\mathcal{D}}q\ donc\ S = \{-1\}$

$Q(x) = 1$ *équivaut* à $\dfrac{5x+5}{x-1} = 1$ *équivaut* à $5x + 5 = x - 1\ alrs$

$x = -\dfrac{3}{2} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}q$

$donc\ S = \{-\dfrac{3}{2}\}$

$Q(x) = \dfrac{3}{2}$ *équivaut* à $\dfrac{\mathbf{5x+5)}}{\mathbf{x-1}} = \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$ *alors* $\mathbf{2(5x+5) = 3(x-1)}$

équivaut à $10x + 10 = 3x - 3\ alors\ x = -\frac{13}{7} \in \mathcal{D}$q donc $S = \{-\frac{13}{7}\}$

Exercices

1) Détermine l'ensemble de définition puis simplifie les fonctions rationnelles suivantes :

$$f(x) = \frac{(2x-3)(16x^2-4)}{(4x+2)(4x^2-1)}; \quad g(x) = \frac{(6x+8x^2)(2x+3)}{2(4x^3+12x^2+9x)};$$

$$h(x) = \frac{4x-x^3}{4x+2x^2}; \quad r(x) = \frac{-9-12x-4x^2}{2x+3};$$

$$q(x) = \frac{4x^2-(3x-1)(2x+5)}{4x^2+20x+25};$$

$$t(x) = \frac{(2x-3)(x-4)+(4x^2-9)-(2x-3)^2}{x^2+4x+4}$$

2) On considère la fonction rationnelle g de IR vers IR définie par

$$g(x) = \frac{(5x-7)(x+3)}{(3x-5)(7-5x)}$$

a) Détermine l'ensemble de définition E de g

b) Dans E simplifie $g(x)$

c) Calcule $g(\sqrt{3})$ en donner une écriture ne comportant pas le radical au dénominateur

d) Résoudre dans E l'équation

$$\frac{x+3}{5-3x} = \frac{1}{3}$$

3) Soit l'application dans R définie par :

$f(x) = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$

a) Factorise f(x).

b) Résous dans R l'équation f(x) = 0.

c) Soit g l'application dans R définie par : $g(x) = ax^2 + bx + 1$.

Calcule les réels a et b sachant que g(1) = 0 et g(2) =1.

d) Soit h la fonction dans R définie par :

$h(x) = \frac{f(x)}{x+1} - \frac{x^2-2x+1}{(x-2)}$

1. Détermine l'ensemble de définition D de cette fonction.
2. Démontre que pour tout x élément de D on a :

$$h(x) = \frac{3-2x}{x-2}$$

4) On donne $A(x) = 2x^2 + 2x - 4$ et $B(x) = (x - 1)^2 + x^2 - 3x + 2$.
   a) Développe, réduis et ordonne le produit : $2(x - 1)(x + 2)$.
   b) Factorise A(x).
   c) Développe, réduis et ordonne le produit : $(x - 1)(x - 2)$.
   d) Factorise B(x).
   e) On considère maintenant l'expression : $C(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$

- Simplifie C(x) en précisant pour quelles valeurs de x la simplification est légitime ?
- Calcule C(x) pour les valeurs suivantes de x : 0 ; 1 ; -2 ; -1.

5) On considère les deux fonctions polynômes f et g définies dans IR par :

$$f(x) = (3x+1)^2(3x-1)^2 - 4(3x+1)^2$$

$$g(x) = 9x(3x+2)(2x-5)(x+1) + 3(2x-5)(x+1)$$

a) Ecris f(x) et g(x) sous forme de produit de facteurs du 1er degré.
b) Résous dans IR les équations : f(x) = 0 puis g(x) = 0.
c) Soit la fonction rationnelle q définie par : $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

   Détermine l'ensemble de définition de q puis simplifie q(x).

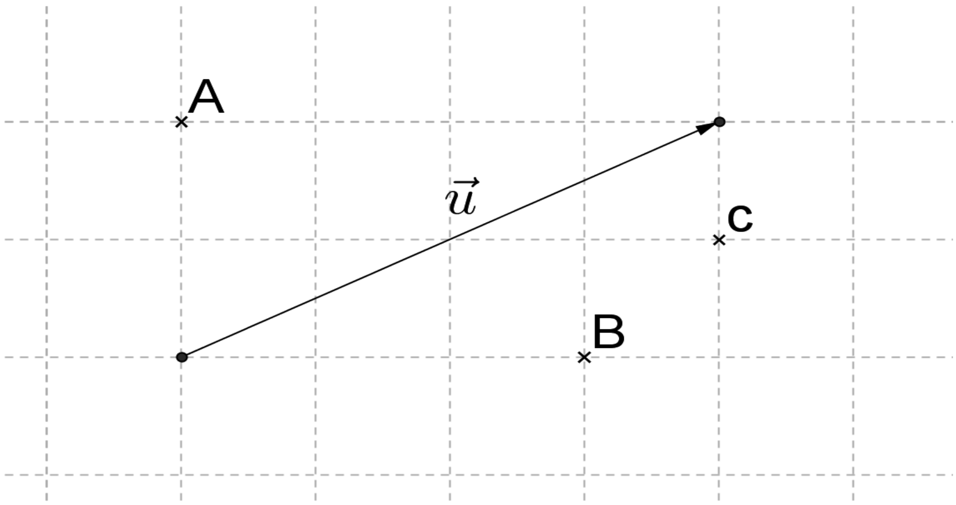
GEOMETRIE

TRANSLATION

1. DEFINITION

Activité 1

Consigne 1 : Reproduis la figure suivante puis construis les points A', B' et C' tels que : $\overrightarrow{AA'} = \vec{u}$; $\overrightarrow{BB'} = \vec{u}$; $\overrightarrow{CC'} = \vec{u}$



On dit que les points A', B' et C' sont les images respectives des points A, B, et C par une correspondance (**application**) appelée **translation** de vecteur $\vec{u}$ qu'on note $t_{\vec{u}}$ ainsi :

$\mathbf{t_{\vec{u}}(A) = A'}$ **signifie** $\mathbf{\overrightarrow{AA'} = \vec{u}}$

$\mathbf{t_{\vec{u}}(B) = B'}$ **signifie** $\mathbf{\overrightarrow{BB'} = \vec{u}}$

$\mathbf{t_{\vec{u}}(C) = C'}$ **signifie** $\mathbf{\overrightarrow{CC'} = \vec{u}}$

Définition :

On appelle translation de vecteur $\boldsymbol{\vec{u}}$**,** l'application du plan P dans P qui à tout point M du plan associe le point M' tel que $\boldsymbol{\overrightarrow{MM'} = \vec{u}}$**.** On la note $\boldsymbol{t_{\vec{u}}}$**.**

Notation : La translation de vecteur $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}}$ se note $\boldsymbol{t_{\overrightarrow{AB}}}$

$\mathbf{t_{\overrightarrow{AB}}(M) = M'}$ **signifie** $\mathbf{\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}}$

M' est l'image de M par la translation de vecteur $\mathbf{\overrightarrow{AB}}$

Consigne 2 : Traduis par une égalité vectorielle chacune des phrases suivantes :

a) Le point A est l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$.

b) L'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$ est B.

c) Le point R se transforme en M par la translation de vecteur $\vec{V}$

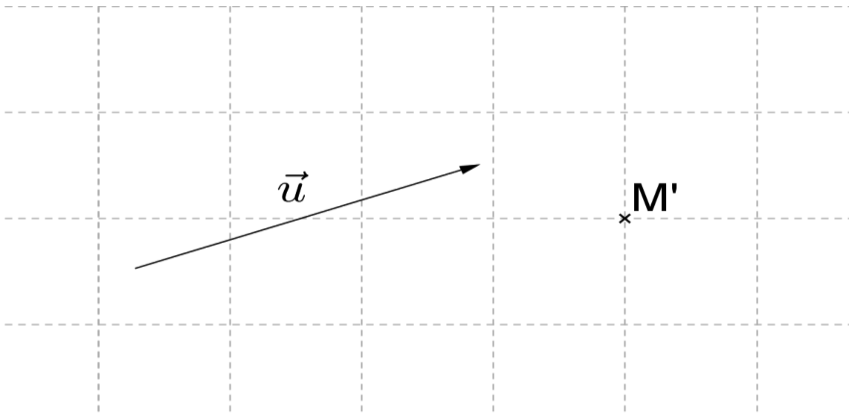
d) Le point I est le translaté du point O dans la translation de vecteur $\overrightarrow{CN}$.

Rép : $t_{\overrightarrow{CD}}(B) = A$ alors $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$; $t_{\overrightarrow{CD}}(A) = B$ alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$; $t_{\vec{V}}(R) = M$ alors $\overrightarrow{RM} = \vec{V}$; $t_{\overrightarrow{CN}}(O) = I$ alors $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{CN}$

2. PROPRIETES ET IMAGE DE FIGURE PAR UNE TRANSLATION

Activité 2

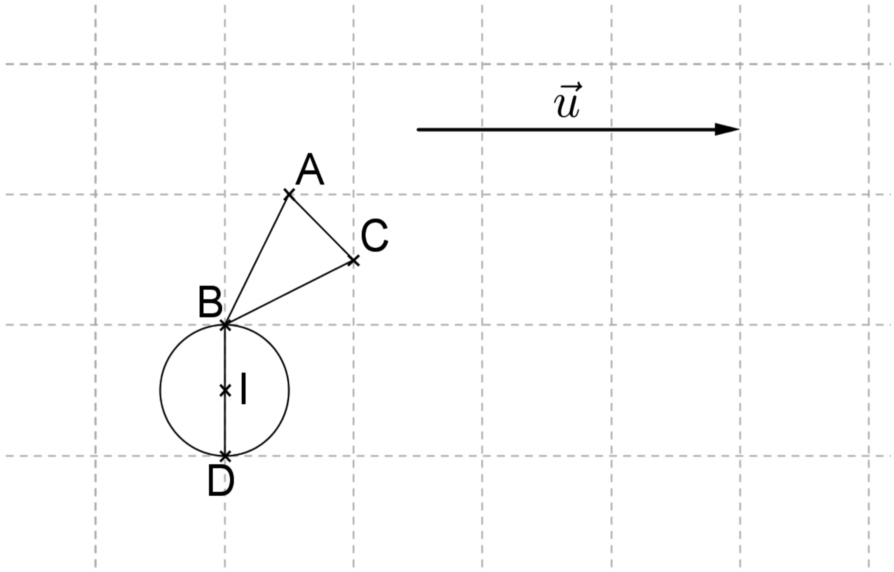
Consigne 1 : Dans la figure suivante, construis le point M tel que $\boldsymbol{\overrightarrow{MM'} = \vec{u}}$.



Par $\boldsymbol{t_{\vec{u}}}$ M' est l'unique image de M et M est l'unique antécédent de M'. $\boldsymbol{t_{\vec{u}}}$ **est une bijection** du plan.

$\boldsymbol{\overrightarrow{MM'} = \vec{u}}$ é**quivaut**à $\boldsymbol{\overrightarrow{M'M} = -\vec{u}}$ donc le point **M** est l'image de **M'** par la translation de vecteur $\boldsymbol{-\vec{u}}$ appelée **translation réciproque de la translation de vecteur** $\boldsymbol{\vec{u}}$ est noté $\boldsymbol{(t_{\vec{u}})^{-1} = t_{-\vec{u}}}$.

Consigne 2 : Reproduis la figure suivante puis construis les images A', B', C', D', I' des points A, B, C, D, I, par $\boldsymbol{t_{\vec{u}}}$.



1) Complète avec $=$ ou $\neq$

   $d(A,B) \ldots d(A',B')$; $d(D,I) \ldots d(D',I')$; $d(A,C) \ldots d(A',C')$

   La translation conserve les distances.

2) Complète les phrases suivantes :

   Les points B, I, D sont …… , leurs images B’, I’, D’ sont aussi …..

3) Complète avec $=$ ou $\neq$ en utilisant ton rapporteur

   $\widehat{BAC} \ldots \widehat{B'A'C'}$; $\widehat{IBC} \ldots \widehat{I'B'C'}$.

   La translation conserve les angles.

4) Complète avec $=$ ou $\neq$: $\overrightarrow{AB} \ldots \overrightarrow{A'B'}$

Propriété fondamentale

si $\left.\begin{array}{l} t_{\vec{u}}(A) = A' \text{et} \\ t_{\vec{u}}(B) = B' \end{array}\right\}$ alors $\overrightarrow{\mathbf{A'B'}} = \overrightarrow{\mathbf{AB}}$

Théorème 1 : Tout point du plan a une image unique et tout point du plan a un antécédent unique donc une translation est une **bijection** du plan.

Théorème 2 : Toute translation conserve les distances.

Toute translation conserve aussi :

- les angles – l’alignement – les aires – le concours – le parallélisme.

Cas particulier : La translation de vecteur nul, $\boldsymbol{t_{\vec{0}}}$**,** transforme tout point du plan en lui-même. On dit que tout point du plan est invariant par $\boldsymbol{t_{\vec{0}}}$.

Image d'une figure par une translation :

Par une translation, l'image :

- d'un segment est un segment de même longueur ;
- d'une droite est une droite parallèle ;
- d'une demi-droite est une demi-droite parallèle de même sens ;
- d'un cercle de centre O par $\boldsymbol{t_{\vec{u}}}$ est cercle de centre $\boldsymbol{O'} = \boldsymbol{t_{\vec{u}}}(\boldsymbol{O})$ et de même rayon r.

Exercices

1) Construis un parallélogramme ABCD de centre O, puis complète :

   $t_{\overrightarrow{AB}}(D) = \cdots$; $t_{\overrightarrow{BC}}(A) = \cdots$; $t_{\overrightarrow{CD}}(B) = \cdots$; $t_{\overrightarrow{DA}}(C) = \cdots$;

   $t_{\overrightarrow{AD}}(B) = \cdots$; $t_{\overrightarrow{DC}}(A) = \cdots$; $t_{\overrightarrow{CB}}(D) = \cdots$; $t_{\overrightarrow{BA}}(C) = \cdots$;

   $t_{\overrightarrow{AO}}(O) = \cdots$; $t_{\overrightarrow{BO}}(O) = \cdots$; $t_{\overrightarrow{CO}}(O) = \cdots$; $t_{\overrightarrow{DO}}(O) = \cdots$.

2) Trace une droite Δ. Marque sur cette droite et dans cet ordre les points A, B, C, D, E tels que les longueurs AB, BC, C, DE sont égales.

   Complete :$t_{\overrightarrow{AB}}(A) = \cdots$; $t_{\overrightarrow{AB}}(B) = \cdots$; $t_{\overrightarrow{AC}}(B) = \cdots$; $t_{\overrightarrow{DA}}(E) = \cdots$

3) ABCD est un parallélogramme.

   Construis les points E et F tels que :$E = t_{\overrightarrow{AC}}(C)$; $F = t_{\overrightarrow{AC}}(B)$

   a) Démontre que les quadrilatères BCEF et ADEF sont des parallélogrammes.

   b) Démontre que C est le milieu de [DF].

4) Soient A, B et C trois points non alignés et $t_{\overrightarrow{AB}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

   a) Construis les images A’, B’, C’ de A, B et C

   b) Que peux-tu dire A’ et B ?

   c) Démontre que A, B, B’ sont alignés. Que représente B pour [AB’] ?

5) Soit ABC un triangle. On pose : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$; $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$; $\vec{w} = \overrightarrow{CA}$.

   Construis les images A’, B’, C’ des points A, B, C dans la translation t_u.

   Construis les images A’’, B’’, C’’ des ponts A’, B’, C’ dans la translation $t_{\vec{v}}$.

   Construis les images A_1, B_1, C_1 des ponts A’’, B’’, C’’ dans la translation $t_{\vec{w}}$.

   Que remarques-tu ?

6) A, B, C sont trois points non alignés.

   c) Construis le point E tel que $t_{\overrightarrow{AC}}(B) = E$.

   d) Les égalités suivantes sont-elles vraie ?

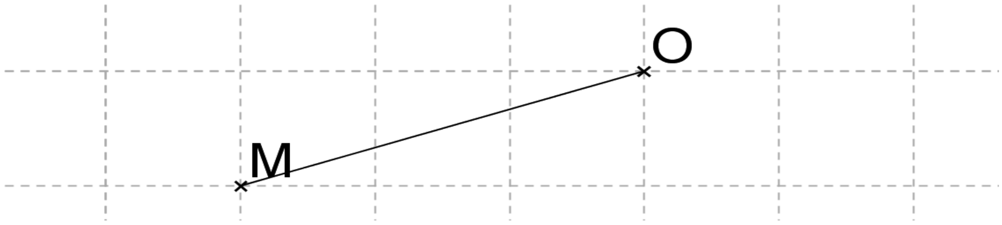
   $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$; $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{EB}$

Symétrie centrale

I. DEFINITION

Activité 1

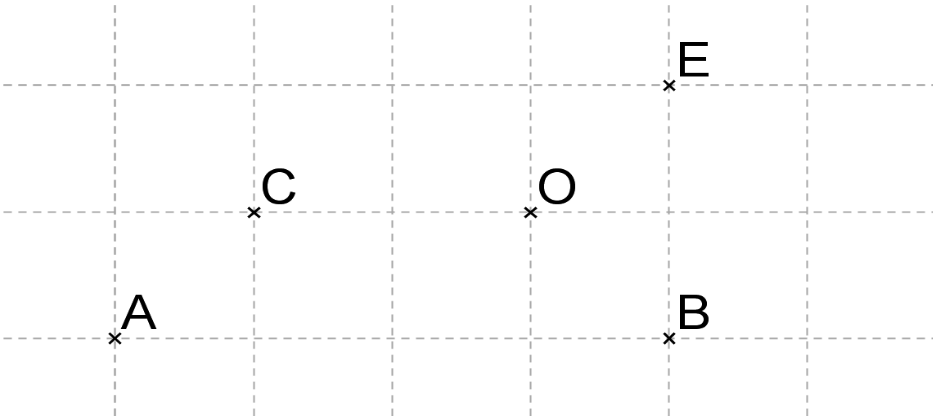
Consigne 1 : Dans la figure suivante, construis le point M' tel que O est le milieu de $[MM']$



Le point M est tel que $\overrightarrow{\mathrm{MO}} = \overrightarrow{\mathrm{OM'}}$ ou $\overrightarrow{\mathrm{OM'}} = -\overrightarrow{\mathrm{OM}}$.

On dit que le point M'est le symétrique de M par rapport à O.

Consigne 2 : Observe la figure suivante puis construis les symétriques D, F, G et H des points A, B, C et E par rapport à O.



Exemple de réponse

Les points D, F, G, H sont les images respectives des points A, B, C, E par une application appelée symétrie centrale de centre O, noté S_O.

$\mathrm{S_O(A) = \ D \ alors} \ \overrightarrow{\mathrm{OD}} = -\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$S_O(B) = F \ alors \ \overrightarrow{OF} = -\overrightarrow{OB}$

$\mathrm{S_O(C) = \ G \ alors} \ \overrightarrow{\mathrm{OD}} = -\overrightarrow{\mathrm{OG}}$

$\mathrm{S_O(E) = \ H \ alors} \ \overrightarrow{\mathrm{OF}} = -\overrightarrow{\mathrm{OH}}$

Définition : On appelle symétrie centrale de centre O**,** l'application du plan P dans P qui à tout point M plan associe le point M' tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{OM'}} = -\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$**.**

O est le milieu de [MM']**.**

Notations :

- La symétrie centrale de entre O est notée S_O.
- Si $S_O(M) = M'$ alors O est le milieu de $[MM']$ et $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$
- $S_O(O) = O$ alors O est le seul point invariant par S_O.

Consigne 3 : Traduis par une égalité vectorielle les phrases :

1) D est le symétrique de B par rapport au point K.
2) E est le symétrique de A par rapport à M.
3) L'image de A par la symétrie centre B est C.

Réponse :$S_K(B) = D$ alors $\overrightarrow{KD} = -\overrightarrow{KB}$

$S_M(A) = E$ alors $\overrightarrow{ME} = -\overrightarrow{MA}$; $S_B(A) = C$ alors $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA}$

II. PROPRIETES ET IMAGE DE FIGURE PAR UNE SYMETRIE CENTRALE

Activité 2

Consigne 1 : Observe la figure suivante, construis le point O centre de la symétrie qui transforme M en M'.

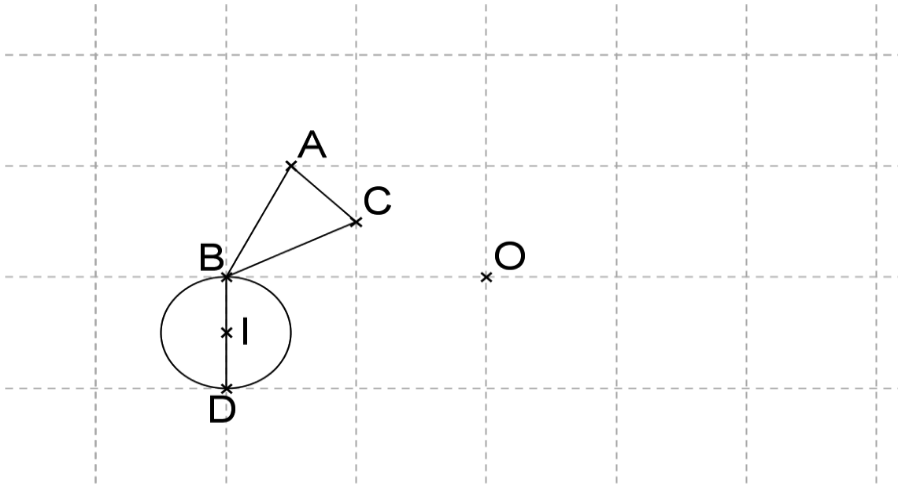
Complete: $S_O(M) = \ldots$; $S_O(M') = \ldots$

Propriété

S_O est une bijection. Sa bijection réciproque est **S_O** elle-même.

S_O^{-1} *es la reciproque de* S_O. *On a* $S_O = S_O^{-1}$

Consigne 2 : Reproduis la figure suivante puis construis les images A', B', C', D' et I' des ponts A, B, C, D et I par S_O.



1) Complète avec $=$ ou $\neq$

$d(A,B) \dots d(A',B')$; $d(I,D) \dots d(I',D')$; $\widehat{BAC} \dots \widehat{B'A'C'}$; $\widehat{DBC} \dots \widehat{D'B'C'}$

2) Complète les phrases suivantes :

Les points A, B et D sont ……, leurs images A', B' et D' sont aussi …

Théorème 1 : La symétrie centrale *conserve les distances.*

Théorème 2 : La symétrie centrale *conserve* les angles.

Image d'une figure par une symétrie centrale :

Par une symétrie centrale, l'image :

- d'un segment est un segment de même longueur ;
- d'une droite est une droite parallèle ;
- d'une demi-droite est une demi-droite parallèle de sens contraires ;
- d'un cercle de centre I par S_O est cercle de centre $I' = S_O(I)$ et de même rayon r.

Exercices

1) Construis, un parallélogramme ABCD de centre O, puis complète :

   $S_O(D) = \cdots;\ S_O(A) = \cdots; S_O(B) = \cdots; S_O(C) = \cdots$

2) Dessine un triangle ABC, puis les points I et J milieux respectifs des côtés [AB] et [AC]. Les droites (CI) et (BJ) se coupent en S.
   a) Construis les symétriques de S par rapport à I et J désignés par P et Q.
   b) Démontre que les quadrilatères APBS et AQCS sont des parallélogrammes.
3) Les points A, B, C et D appartiennent à un cercle de rayon 2 cm. On note **I** le milieu de [AB], **J** celui de [BC], E le symétrique de D par rapport à **I** et F le symétrique de D par rapport à **J**.
   a) Fais une figure illustrant cet énoncé.
   b) Démontre que les quadrilatères AEBD et DBFC sont des parallélogrammes.
   c) Compare les vecteurs $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{DB}\ et\ \overrightarrow{CF}$.
   d) Complète :

      $t_{\overrightarrow{AE}}(D) = \cdots;\ t_{\overrightarrow{FC}}(B) = \cdots;\ S_I(A) = \cdots;\ \ S_J(B) = \cdots$
4) Soit USR un triangle rectangle en U et I milieu de [SR].
   a) Construis le point D image du point U par la translation de vecteur $\overrightarrow{IR}$.
   b) Construis le point A image du point D dans la symétrie centrale de centre I.
   c) Démontre que le quadrilatère UDRI est un parallélogramme.
5) Trace un rectangle ABCD de centre O.
   a) Soit le I milieu de [AB] et E le symétrique de D par rapport à I.

      Prouve que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CB}$, puis en déduis la nature du triangle AEC.

b) Soit F le symétrique de O par rapport à (BC) et G le point d'intersection des droites (BF) et (CD). Donne la nature du quadrilatère BFCO.

c) Vrai ou faux ?

$.\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DO}$ $.\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{CA}$ $.\overrightarrow{FO} = \overrightarrow{AB}$

$.\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{GC}$ $.\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{CF}$ $.(IC)//$(EF)

6) Soit AEF un triangle quelconque.

a) Construis le symétrique B de A par rapport à E, puis le symétrique C de B par rapport à F.

b) Construis le point D image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

c) Donne la nature du quadrilatère ABDC.

d) Complète : $t_{\overrightarrow{AB}}(A) = \cdots$; $t_{\overrightarrow{AB}}(C) = \cdots$; $S_F(A) = \cdots$; $S_F(B) = \cdots$

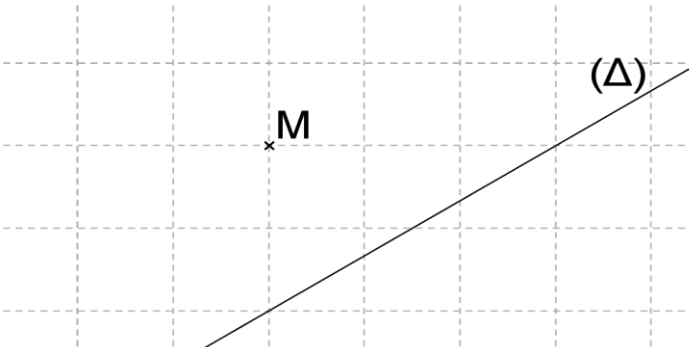
Symétrie orthogonale

I. DEFINITION

Activité 1

Consigne 1 : Définis la médiatrice d'un segment

Consigne 2 : Reproduis la figure suivante et construis le point M' tel que (Δ) soit la médiatrice de$[MM']$.

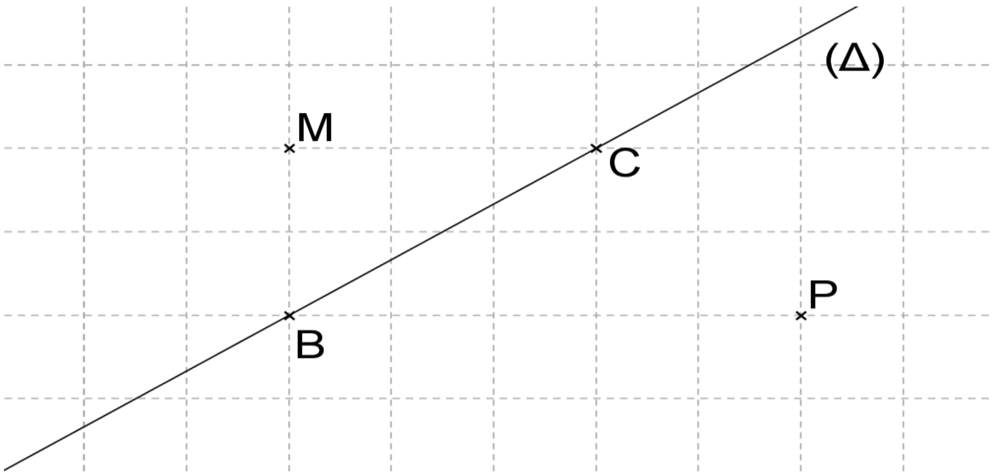


Conclusion : On dit que M' est le symétrique de M par rapport à (Δ).

On note $S_{(\Delta)}(M) =$ M'. La droite (Δ) est appelée **axe de la symétrie**.

Le point O est le projeté orthogonal de M sur (Δ).

Consigne 3 : Reproduis la figure suivante puis construis les points M' et P' symétriques respectifs des points M et P par rapport à (Δ).



Complète :

$S_{(\Delta)}(M) =$ ….. ; $S_{(\Delta)}(P) =$… ; $S_{(\Delta)}(M') =$ ….. ; $S_{(\Delta)}(P') =$… ; $S_{(\Delta)}(B) =$ …

$S_{(\Delta)}(C) =$ …

S_{Δ}est-elle une application ?

Conclusion : $S_{(\Delta)}$est une application.

- *T*out point de (Δ) est invariant par $S_{(\Delta)}$.
- S_{Δ} est une bijection, sa bijection réciproque est elle-même.

Définition de la médiatrice d'un segment : La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment et passant par le milieu du segment.

Définition : On appelle symétrie orthogonale par rapport à la droite (△) [ou d'axe (△)], l'application du plan dans le plan qui a tout point M associe le point M' tel que :

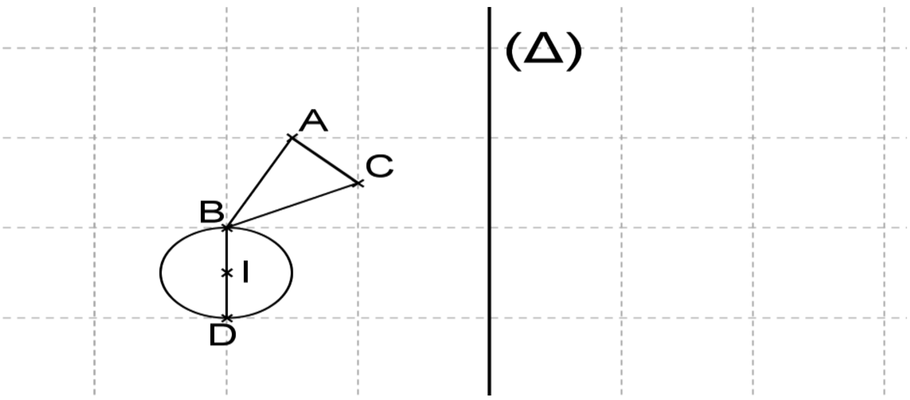
- Si M ∈ (△), son image est lui-même
- Si M ∉ (△), son image est M' tel que (△) est la médiatrice de [MM'].
  On note $S_{\Delta}(M) = M'$

La droite(△) est appelée axe de la symétrie orthogonale (ou réflexion).

II. PROPRIETES ET IMAGE DE FIGURES PAR UNE SYMETRIE ORTHOGONALE

Activité 2

Consigne : Reproduis la figure suivante puis construis les images A', B', C', D', I' des ponts A, B, C, D, I par S_{Δ}.



Complète avec = ou ≠

$d(A,B) \dots d(A',B')$; $d(I,D) \dots d(I',D')$; $\widehat{BAC} \dots \widehat{B'A'C'}$; $\widehat{DBC} \dots \widehat{D'B'C'}$

Théorème 1 : La symétrie orthogonale *conserve les distances.*

Théorème 2 : La symétrie orthogonale *conserve* les angles.

Image d'une figure par une symétrie orthogonale :

Par une La symétrie orthogonale, l'image :

- d'un segment est un segment de même longueur ;
- d'une droite est une droite ;
- d'une demi-droite est une demi-droite ;
- d'un cercle de centre O par $S_{(\Delta)}$ est un cercle de centre O' $= S_{\Delta}(O)$ et de même rayon r.

Exercices

1) Soit un segment [AB] et une droite (Δ) sécante à la droite (AB) en I ; (Δ) n'est pas orthogonale à (AB) et les trois points A, B et I sont distincts.
   a) Construis les symétriques A' et B' de A et de B par rapport à (Δ). Qu'est (Δ) pour [AA'] et [BB'] ?
   b) Trouve les images du point I et du bipoint (A, B) dans $S_{(\Delta)}$.
   c) Compare AB et A'B', A'B et AB', IA et IA'.
2) Soient deux droites (Δ) et (Δ'), sécantes en O et un point A n'appartenant ni à (Δ) ni à (Δ'). On appelle B, le symétrique de A par rapport à (Δ) et C, le symétrique de A par rapport à (Δ'). Donne le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
3) Marque trois points non alignés A, B et C. soit I milieu de [BC]
   a) Construis le symétrique E de A par rapport à I.
   b) Complète : $t_{\overrightarrow{AB}}(C) = \cdots$; $t_{\overrightarrow{AI}}(I) = \cdots$; $t_{\overrightarrow{EB}}(C) = \cdots$
   c) Construis le symétrique de la figure (A, B, E, C) par rapport à la droite passant par B et perpendiculaire à (BC).
4) On considère A, B et C trois points non alignés.
   a) Dessine les symétriques B' et C' de B et C par la symétrie de centre A.
   b) Trouve l'image A' de A par la symétrie orthogonale d'axe (BC).
   c) Place les images B_1 et C_1 des points B et C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
   d) Dis la nature du quadrilatère BCC_1B_1. Justifie.
5) Soit USR un triangle rectangle en U et I milieu de [SR].
   a) Construis le point D image du point U par la translation de vecteur $\overrightarrow{IR}$.
   b) Construis le point A image du point D dans la symétrie de centre I.

c) Démontre que le quadrilatère UDRI est un parallélogramme.

d) Construis le symétrique M de S dans la symétrie d'axe (AD).

e) Trace le cercle circonscrit au triangle USR.

6) Soit USR un triangle rectangle en U et I milieu de [SR].

a) Construis le point D image du point U par la translation de vecteur $\overrightarrow{IR}$.

b) Construis le point A image du point D dans la symétrie centrale de centre I.

c) Démontre que le quadrilatère UDRI est un parallélogramme.

d) Construis le symétrique M de S dans la symétrie orthogonale d'axe (AD).

e) Trace le cercle circonscrit au triangle USR.

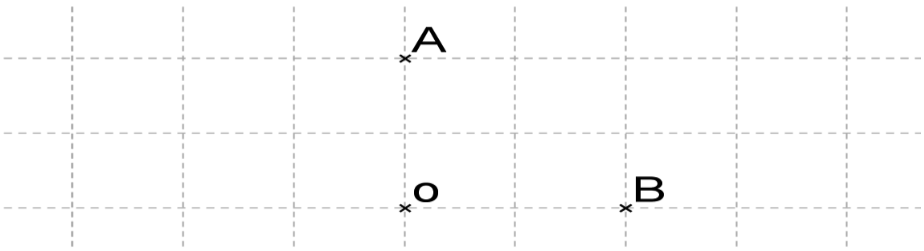
Homothétie

" Un moyen de réduire ou d'agrandir "

I. DEFINITION D'UNE HOMOTHETIE

Activité 1

Consigne 1 : Observe la figure suivante puis construis les points A' et B' tels que : $\overrightarrow{OA'} = 3\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB'} = 3\overrightarrow{OB}$



Les points A' et B' sont les images respectives des points A et B par une application appelée homothétie de centre O et de rapport 3. On note $h_{(0,3)}$ ou h.

$\mathbf{h(A) = A'}$ **signifie** $\mathbf{\overrightarrow{OA'} = 3\overrightarrow{OA}}$

$\mathbf{h(B) = B'}$ **signifie** $\mathbf{\overrightarrow{OB'} = 3\overrightarrow{OB}}$

Définition : Etant donné un point fixe O du plan et un réel non nul k, l'application du plan qui a tout point M du plan fait correspondre le point M' tel que : $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$, se nomme **homothétie** de centre **O** et de rapport **k.** On note $h_{(0,k)}$ ou simplement h.

$\mathbf{h(M) = M'}$**signifie** $\mathbf{\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}}$

Remarques

- $h(O) = O$, le centre de l'homothétie est le seul point invariant.
- Si A' est l'image de A par une homothétie de centre I et de rapport différent de 1, les point I, A, A' sont alignés.

Consigne 2 : Traduis par une égalité vectorielle les phrases suivantes :

a) A est l'image de B par l'homothétie de centre C et de rapport $\frac{2}{3}$

b) L'image de A par l'homothétie de centre C et de rapport -5 est B.

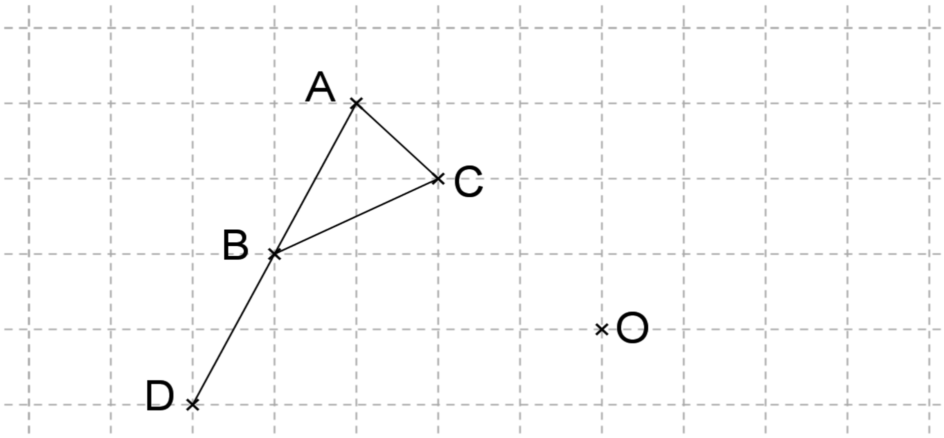
c) Par l'homothétie de centre A, l'image de R est P, le rapport est m.

Réponse : a) $\overrightarrow{CA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$; b) $\overrightarrow{CB} = -5\overrightarrow{CA}$; c) $\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AR}$

II. PROPRIETES ET IMAGE DE FIGURE PAR UNE HOMOTHETIE

Activité 2

Consigne : Reproduis la figure suivante puis construis les images A', B', C', D' des ponts A, B, C, D par l'homothétie de centre O et de rapport 2 et vérifie que : $\overrightarrow{A'B'} = 2\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{A'C'} = 2\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{A'D'} = 2\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{B'C'} = 2\overrightarrow{BC}$



Théorème : Si A' et B' sont les images respectives de deux points A et B par une homothétie de rapport k (non nul), alors on a :

$\mathbf{\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}}$.

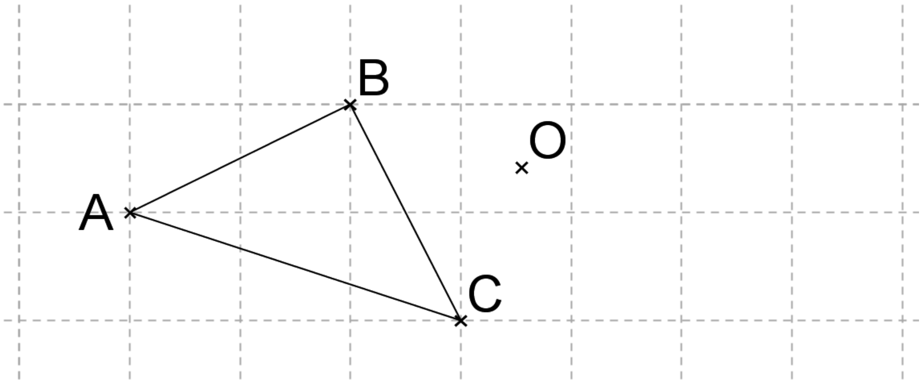
Image d'ensemble de points :

Par une homothétie :

- L'image d'une droite est une droite parallèle **;**
- L'image d'une demi-droite est une demi-droite parallèle de même sens si le rapport k est positifs et de sens contraire si le rapport est négatif ;
- L'image d'un segment est un segment ;
- L'image d'un secteur angulaire est un secteur de même mesure.

Exercices

1) Observe la figure suivante



Construis l'image du triangle ABC par l'homothétie de centre O et de rapport 2 puis par l'homothétie de centre O et de rapport -2.

2) ABC est un triangle et I le milieu de [BC].
   a) Construis l'image A' du point A par l'homothétie h de centre C et de rapport $\frac{1}{2}$.
   b) Quelle est l'image de la droite (AB) par h ?
   c) Quelle est l'image de la droite (BC) par h ?
3) Soit un carré ABCD de centre O. construis son image par l'homothétie de centre O et de rapport -3.
4) Soit un carré ABCD de centre O et le point E symétrique de O par rapport à B.

   Construis l'image du carré ABCD par :
   a) l'homothétie de centre A et de rapport $-\frac{1}{2}$;
   b) l'homothétie de centre E et de rapport 2.
5) Soit un rectangle ABCD et un point E extérieur à ce rectangle.

   Construis l'image du rectangle par l'homothétie de centre E et de rapport -2.
6) Dessine l'image $\mathcal{C}$' du cercle $\mathcal{C}$ par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.

Quel est le rapport de l'aire de $\mathcal{C}'$ à l'aire de $\mathcal{C}$?

7) Trois points A, B, C sont alignés dans cet ordre et sont tels que, l'unité étant le cm, $AB = 2$ et $BC = 3$.

   a) Détermine le rapport de l'homothétie de centre A qui transforme B en C.

   b) Détermine le rapport de l'homothétie de centre B qui transforme C en A.

   c) Détermine le rapport de l'homothétie de centre C qui transforme A en B.

Longueur d'un arc

I. RELATION ENTRE LA LONGUEUR D'UN ARC ET SA MESURE EN DEGRES OU GRADES

Activité 3

Consigne 1 : Voici les résultats des mesures effectuées sur des arcs d'un cercle.

Complète le tableau suivant. Que constates-tu ?

Longueur (**L**) de l'arc en **cm**	1,7	3,4	5,1
Mesure (**d**) de l'arc en **degrés**	20	40	60
Quotient des deux mesures $\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{d}}$			

Constat : Je constate que les quotients calculés sont tous égaux à **0,085** donc $\frac{1,7}{20} = \frac{3,4}{40} = \frac{5,1}{60}$

Nous avons deux suites de nombres proportionnels.

Propriété : Les longueurs des arcs d'un même cercle sont proportionnelles à leurs mesures en degrés ou grades $\frac{L_1}{d_1} = \frac{L_2}{d_2}$ ou $\frac{L_1}{g_1} = \frac{L_2}{g_2}$.

Consigne 2 : Un arc de cercle de 17° a pour longueur 25m

1) Quelle est la longueur d'un arc de cercle de 45° ?
2) Quelle est la mesure en degrés d'un arc de ce cercle de 50m ?

II. LONGUEUR D'UN ARC DE CERCLE EN DEGRES OU GRADES

La longueur (ou périmètre) d'un cercle de rayon R est $p = 2\pi R$ et le cercle complet mesure 360°. Ainsi la longueur L d'un arc de ce cercle est telle que :

- Si la mesure de l'arc est d (en degrés) : $\mathbf{L} = \frac{\mathbf{2\pi Rd}}{\mathbf{360}}$ ou $\mathbf{L} = \frac{\mathbf{\pi Rd}}{\mathbf{180}}$
- Si la mesure de l'arc est g (en grades) : $\mathbf{L} = \frac{\mathbf{2\pi Rg}}{\mathbf{400}}$ ou $\mathbf{L} = \frac{\mathbf{\pi Rg}}{\mathbf{200}}$

Activité 4

Consigne : Le rayon d'un cercle est 5cm. $\pi = 3,14$

1) Calcule la longueur L_1 d'un arc de ce cercle de40°.

2) Calcule la longueur L_2 d'un arc de ce cercle de 75gr.

III. LE RADIAN

Définition du radian : Le radian (rd ou rad), sur un cercle, est la mesure d'un arc dont la longueur est égale au rayon (le demi-cercle est alors un arc de π radians).

$\boldsymbol{\pi}$ rad $= \mathbf{180°}; \mathbf{90°} = \dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}$rad

Pour convertir **d** (degrés) en **α** (radians) ou de **α** (radians) en **d** (degrés), on applique la formule : $\dfrac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\pi}} = \dfrac{\mathbf{d}}{\mathbf{180}}$

Activité 5

Consigne :

1. Trouve la mesure en radians de chacun des arcs de 30°, de 45°, de 60°.
2. Calcule en degrés les mesures des arcs suivants donnés en radians : $\frac{3\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}$

Exemple de réponse

$$1\ \alpha = \frac{d\times\pi}{180}\begin{cases} d = 30° alors \alpha = \frac{\pi}{6} \\ d = 45° alors \alpha = \frac{\pi}{4} \\ d = 60° alors \alpha = \frac{\pi}{3}\end{cases} 2\ d = \frac{180\times\alpha}{\pi}\begin{cases} \alpha = \frac{3\pi}{2} alors d = 270° \\ \alpha = \frac{2\pi}{3} alors d = 120° \\ \alpha = \frac{5\pi}{6} alors d = 150°\end{cases}$$

IV. LONGUEUR D'UN ARC EN RADIANS

Si le rayon d'un cercle a pour longueur **R**, un arc de ce cercle de mesure **α** (en radians) a pour longueur : $\mathbf{L = R.\alpha}$

Activité 6

Consigne : Le rayon d'un cercle est 3cm.

1) Un arc de ce cercle mesure 1,5 rad. Trouve sa longueur.
2) Un arc de ce cercle a une longueur de 8,1cm. Trouve sa mesure en radians.

Exercices

1) Exprime en grades et en radians les mesures des arcs suivants :

   75° ; 105° ; 36° ; 108° ; 120° ; 72°.

2) Exprime en degrés et en radians les mesures des arcs suivants :

   120gr ; 72gr ; 75gr ; 105gr ; 180gr.

3) Exprime en degrés et en grades les mesures des arcs suivants : $\frac{\pi}{3}rad$; $\frac{\pi}{12}rad$; $\frac{5\pi}{6}rad$; $\frac{\pi}{15}rad$; $\frac{7\pi}{4}rad$; $\frac{3\pi}{2}rad$; $\frac{3\pi}{4}rad$; $\frac{2\pi}{3}rad$

4) Le rayon d'un cercle est 2,5cm. $\pi = 3{,}14$

   a) Calcule la longueur L_1 d'un arc de ce cercle de 25°.

   b) Calcule la longueur L_2 d'un arc de ce cercle de 20gr.

5) Le rayon d'un cercle est 5cm. $\pi = 3{,}14$

   a) Calcule la longueur L_1 d'un arc de ce cercle de70°.

   b) Calcule la longueur L_2 d'un arc de ce cercle de 72gr.

6) Le rayon d'un cercle est 3cm.

   a) Un arc de ce cercle mesure $\frac{\pi}{12}rad$. Trouve sa longueur.

   b) Un arc de ce cercle a une longueur de 5cm. Trouve sa mesure en radians.

7) Le rayon d'un cercle est 5cm.

   a) Un arc de ce cercle mesure $\frac{\pi}{15}rad$. Trouve sa longueur.

   b) Un arc de ce cercle a une longueur de 3cm. Trouve sa mesure en radians.

8) Un arc d'un cercle a pour longueur 1,57cm. Détermine le rayon de ce cercle lorsque :

   a) l'arc mesure 40° ;

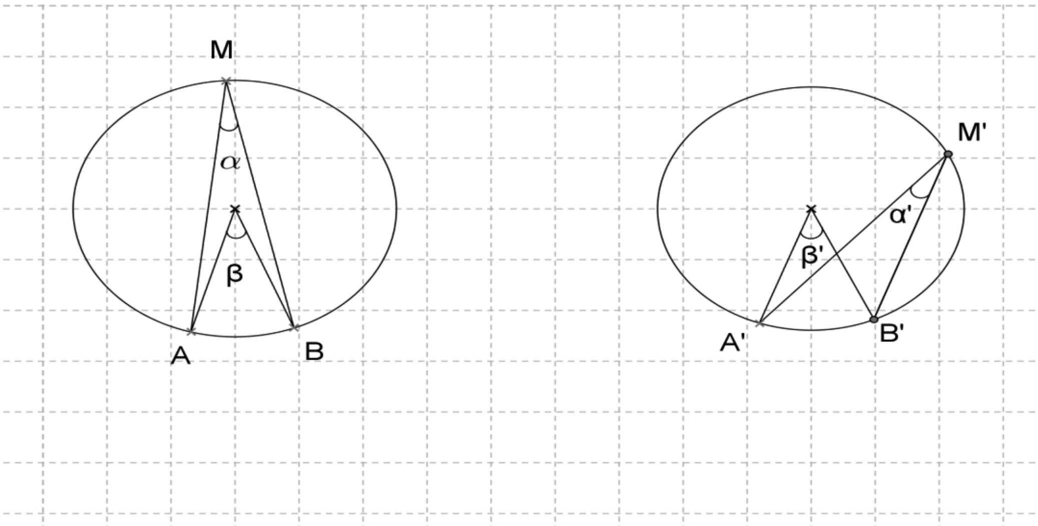
   b) l'arc mesure $\frac{3\pi}{4}rad$

Angle-Aire d'un secteur circulaire

I. SECTEUR ANGULAIRE INSCRIT DANS UN CERCLE ET SECTEUR ANGULAIRE AU CENTRE CORRESPONDANT

Activité 1

Consigne : Observe les figures, effectue les mesures puis complète le tableau. Que peux-tu conclure ?



Angle inscrit α	$\boldsymbol{\alpha_1 = \cdots}$	$\boldsymbol{\alpha_2 = \cdots}$
Angle au centre correspondant β	$\boldsymbol{\beta_1 = \cdots}$	$\boldsymbol{\beta_2 = \cdots}$
Relation entre α et β	$\boldsymbol{\alpha_1 = \cdots \beta_1}$	$\boldsymbol{\alpha_1 = \cdots \beta_2}$

Conclusion : Dans tous ces cas, on a : $\boldsymbol{\alpha = \frac{1}{2}\beta}$

Ainsi : $\boldsymbol{\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}}$

Angle inscrit = moitié de angle au centre correspondant

Théorème fondamental : La mesure d'un secteur angulaire inscrit dans un cercle est égale à la moitié de la mesure du secteur angulaire au centre correspondant (ou associé).

II. AIRE D'UN SECTEUR CIRCULAIRE

L'aire **A** d'un secteur circulaire est égale au demi-produit du rayon **R** du cercle par la longueur **L** de l'arc intercepté : $\boldsymbol{\mathcal{A}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{L}.\boldsymbol{R}$

- Si l'angle est d (en degrés) : $\boldsymbol{\mathcal{A}} = \frac{\pi R^2 d}{360}$
- Si l'angle est g (en grades) : $\boldsymbol{\mathcal{A}} = \frac{\pi R^2 g}{400}$
- Si l'angle est α (en radians) : $\boldsymbol{\mathcal{A}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{R}^2\boldsymbol{\alpha}$

Activité 2

Consigne : Calcule les aires des secteurs circulaires ayant respectivement pour angles 17° ; 50grades ; 1,2 radians dans un cercle de 10cm de rayon.

Exercices

1) Complète le tableau suivant :

R	4	5	
L	7		1,5
$\mathcal{A}$		12	7,5

2) Calcule l'aire du secteur circulaire dans les cas suivant :
   a) d = 20° R = 5cm ;
   b) g = 30gr R = 5cm ;
   c) $\boldsymbol{\alpha}$ = 2,5rad R = 5cm ;
   d) d = 75° R = 3cm ;
   e) g = 120gr R = 3cm ;
   f) $\boldsymbol{\alpha} = \frac{2\pi}{3} rad$ R = 3cm ;

3) Le rayon d'un cercle est 10cm.
   a) Complète le tableau suivant :

Arc	**α**	**β**	**γ**	**θ**	**λ**
Mesure de la longueur de l'arc en cm		10,5		14	
Mesure de l'arc en degrés	60		85		75

   b) Calcule en radians puis en grades la mesure d'un arc de 50°.
   c) Calcule aire d'un secteur circulaire d'angle 50°.On prendra л = 3,14.

4) On partage un cercle de 3cm de rayon en trois arcs (a), (b), (c) et dont les mesures en degrés sont proportionnelles aux nombres 3 ; 10 et 5.
   a) Calcule les mesures de ces arcs.
   b) Calcule la longueur de l'arc (a).
   c) Exprime en radians puis en grades les mesures des arcs (a), (b) et (c).
   d) Calcule l'aire de 2,7 radians de même cercle.

Positions relatives d'un cercle et d'une droite-Tangente

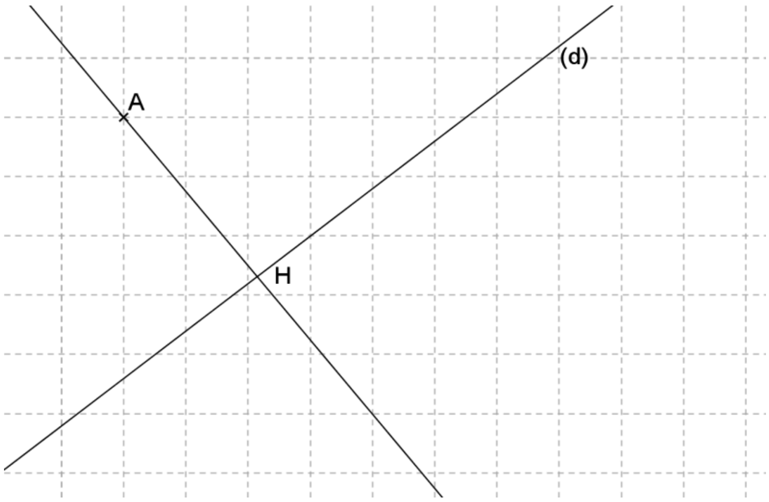
I. DISTANCE D'UN POINT A UNE DROITE

Activité 1

Consigne : Soit une droite (d) et un point A n'appartenant pas à (d).

Trace une droite passant par A et perpendiculaire à (d), elle coupe (d) en H.

Exemple de réponse



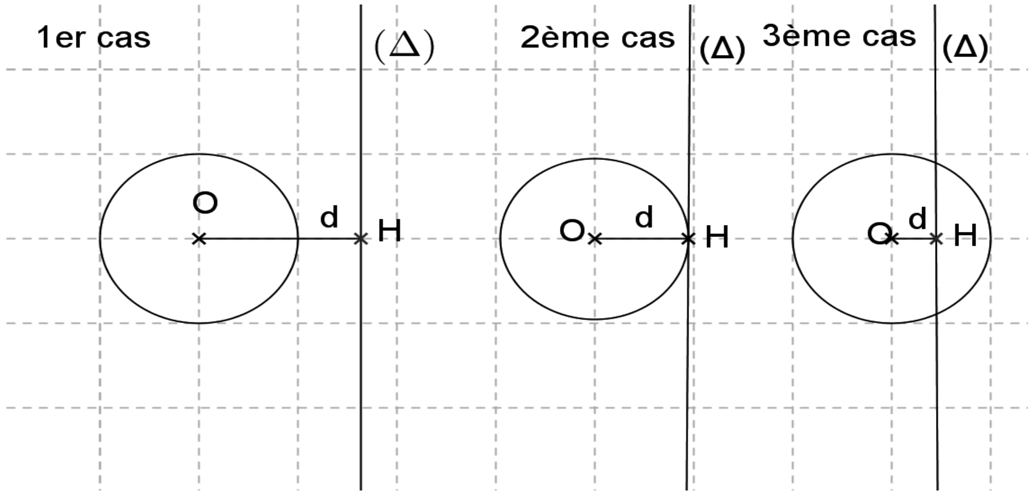
Conclusion :

- Le point **H** s'appelle le **projeté orthogonal** du point **A** sur la droite (d).
- La distance du point A au point H est la distance du pont A à la droite (d).

II. POSITIONS RELATIVES D'UN CERCLE ET D'UNE DROITE

Activité 2

Consigne : Observe les trois figures suivantes dans lesquelles **d** est la distance du centre **O** du cercle à la droite **(Δ)** (d = OH) et **R** le rayon du cercle.



Compare **d** et **R** dans chacun des trois cas.

Positions d'un cercle ($\mathcal{C}$) par rapport à une droite (Δ)

Soit un cercle **($\mathcal{C}$)** de centre O et rayon **R**, on le note ; **$\mathcal{C}$(O ; R),** et **d** la distance de O à une droite **(Δ)** :

- si $\mathbf{d} > R$, **($\mathcal{C}$)** et (Δ) n'ont pas de points communs : la droite est extérieure au cercle
- si **d = R, ($\mathcal{C}$)** et (Δ) ont un (1) point d'intersection : la droite est tangente au cercle
- si $\mathbf{d} < R$, **($\mathcal{C}$)** et (Δ) ont deux (2) points d'intersection : la droite est sécante au cercle

Théorème : Si **d** désigne la distance du centre d'un de rayon **R** à une droite (Δ), on a les trois propriétés :

1- **(Δ)** est extérieure au cercle équivaut à **d >R**

2- **(Δ)** est sécante au cercle équivaut à **d < R**

3- **(Δ)** est tangente au cercle équivaut à **d = R**

III. TANGENTE A UN CERCLE

Définition : La tangente à un cercle en un point est la droite perpendiculaire au rayon qui passe par ce point.

Remarque : Si deux points A et B sont diamétralement opposés sur un cercle de centre O alors O est le milieu de [AB] et le segment [AB] est un diamètre du cercle.

Activité 3

Consigne : Construis un cercle de centre O et de rayon 3cm.

1) Trace un diamètre [AB] de ce cercle. Que représente le point O pour le segment [AB].
2) Trace deux droites (d) et (d') tangentes à ce cercle respectivement en A et en B. démontre que (d) et (d') sont parallèles.

Exercices

1) Tracer une droite $\mathcal{D}$ puis construis des points A, B, C, D, E, situés d'un même côté de $\mathcal{D}$ à 4cm de distance de cette droite.

   Que remarques-tu ? Sur quelle ligne particulière ces points sont-ils situés ?

2) Soit **H** le projeté sur une droite (**Δ**) du centre **O** d'un cercle de rayon **R.** Sans faire de figure, complète le tableau suivant :

OH	R	**Position relative de la droite et du cercle**
5cm	2cm	La droite ne coupe pas le cercle
2cm	5cm	
10cm	10cm	
1m	1dm	

3) Complète le tableau suivant :

Position relative de la droite (Δ) et du cercle($\mathcal{C}$)	**Relation entre d et R**	**Nombre de points d'intersection**
Δ est extérieure à $\mathcal{C}$		
Δ est …………………………….	d = R	
Δest …………………………….		2

4) Soit un segment [AB] de longueur 5cm et M milieu de [AB].
   a) Construis la médiatrice d de [AB].
   b) Construis deux cercles de centres respectifs A et B, tangentes à d en M.

5) Construis un cercle de centre O et de rayon 2 cm.

a) Trace un diamètre [AB] de e cercle. Que représente O pour le segment [AB].

b) Construis deux droites (d) et (d') respectivement tangentes au cercle en A et B. Comment sont les droites (d) et (d') ?

6) Soit un segment [AB] tel que AB = 7cm et (Δ) la médiatrice de [AB]. $\mathcal{C}_1$ est le cercle de centre A et de rayon 4cm, $\mathcal{C}_2$ est le cercle de centre B et de rayon 3cm et $\mathcal{C}_3$ est le cercle de centre A et de rayon 3,5cm.
   a) Fais une figure.
   b) Donne la position de chacun des cercles $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ par rapport à (Δ).
7) L'unité de longueur est le centimètre.
   Trace une droite (Δ) et un point I dont la distance à(Δ) est 4. On appelle H le projeté orthogonal de I sur (Δ). Trace les 7 cercles de centre I et de rayon respectifs 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.
   Complète le tableau suivant :

Rayon du cercle	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de points communs du cercle avec la droite							

8) On considère une droite (d), un cercle $\mathcal{C}$ de centre O, de rayon r, et H le projeté orthogonal de O sur (d).
   A quelle condition ce cercle a-t-il :
- Deux points communs avec (d) ?
- Un seul point commun avec (d) ?
- Aucun point commun avec (d) ?

Cas d'isométrie des triangles

I. DEFINITIONS

Définition d'une isométrie : On appelle isométrie, toute application (ou transformation) du plan sur le plan qui conserve les distances.

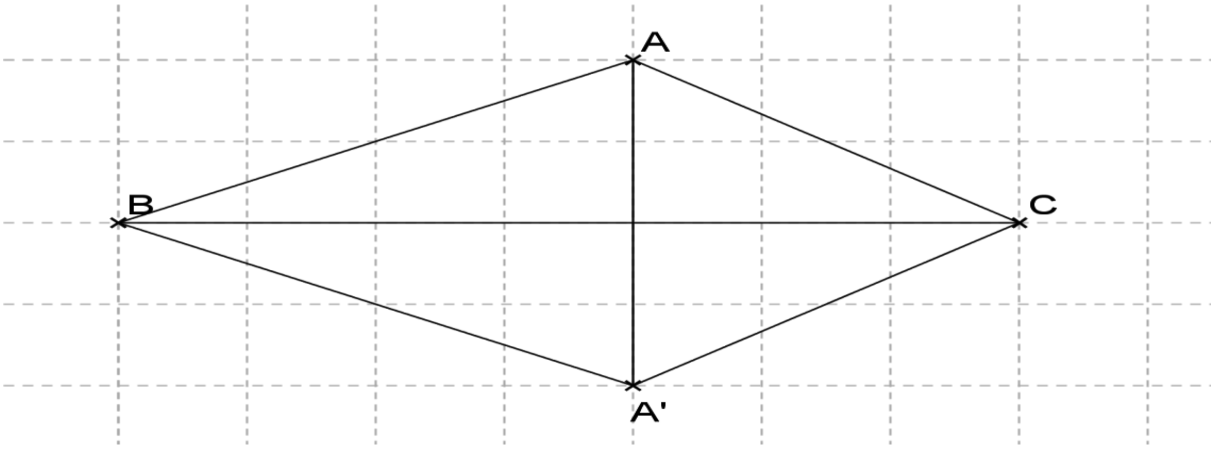
La translation, la symétrie centrale, la symétrie orthogonale sont des isométries.

Triangles isométriques : Deux triangles sont isométriques lorsque l'un est l'image de l'autre par une transformation du plan qui conserve les distances (translation, symétrie centrale, symétrie orthogonale).

Deux triangles isométriques sont superposables.

Activité 4

Observe la figure suivante



Consigne :

1) Complete : $S_{(BC)}(B) = \dots$; $S_{(BC)}(C) = \dots$; $S_{(BC)}(A) = \dots$.
2) Les triangles ABC et A'BC sont-ils isométriques?

II. CAS D'ISOMETRIE DES TRIANGLES

On peut utiliser l'un des trois cas suivants pour montrer que deux triangles sont isométriques.

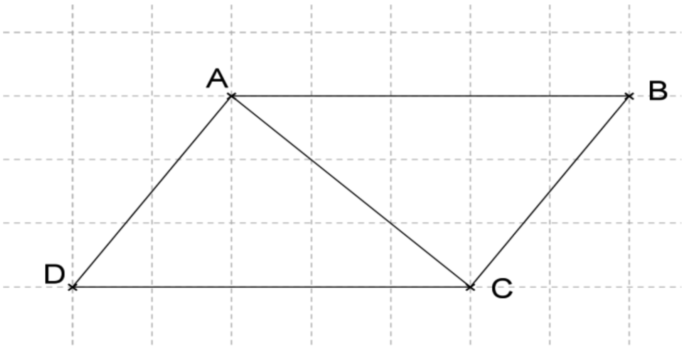
Premier cas : Si deux triangles ont un côté égal respectivement et deux angles respectivement égaux, alors ils sont isométriques.

Deuxième cas : Si deux triangles ont un angle égal, compris entre deux côtés respectivement égaux, alors ils sont isométriques.

Troisième cas : Si deux triangles ont leurs trois côtés respectivement égaux, alors ils sont isométriques.

Activité 4

Observe la figure suivante où ABCD est un parallélogramme.



Consigne : Prouve de trois manières différentes que les triangles ABC et ADC sont isométriques.

Exemple de réponse

1ère manière : ABCD étant un parallélogramme de centre O alors :

$S_O(A) = C$; $S_O(B) = D$ et $S_O(C) = A$ donc ADC est l'imagedeABC S_O d'où les triangles ABC et ADC sont isométriques.

2ème manière : ABCD étant un parallélogramme de centre O alors :

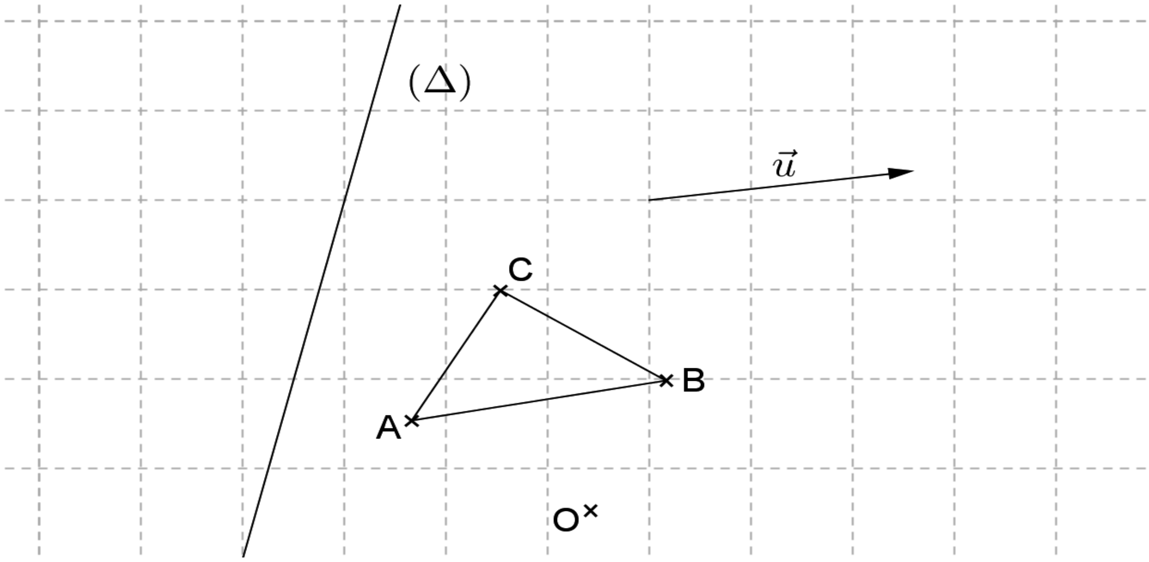
$AB = DC; BC = AD$ et $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$ ainsi $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ sont l'angle respectivement égal compris entre deux côtés respectivement égaux donc ABC et ADC sont isométriques.

3ème manière : ABCD étant un parallélogramme de centre O alors :

AB= DC ; BC = AD et AC = AC donc ABC et ADC sont isométriques.

Exercices

1) Observe la figure suivante



Construis :

- l'image $A_1B_1C_1$ du triangle ABC par $t_{\vec{u}}$;
- l'image $A_2B_2C_2$ du triangle ABC par S_O ;
- l'image $A_3B_3C_3$ du triangle ABC par S_Δ ;

Démontre que les triangles suivants sont isométriques :

a) $A_1B_1C_1$ et $A_2B_2C_2$;
b) $A_1B_1C_1$ et $A_3B_3C_3$;
c) $A_2B_2C_2$ et $A_3B_3C_3$

2) Construis deux triangles ABC et A'B'C' rectangles respectivement en A et A' tels que AB = A'B' et AC = A'C'.

a) Démontre que les triangles ABC et A'B'C' sont isométriques.
b) Deux triangles rectangles ayant un angle aigu de même mesure sont-ils toujours isométriques ?

3) Soit Δ et Δ' deux droites parallèles.

d est une droite qui coupe Δ en A et Δ' en A' ; O est un point de d, distinct de A et de A'.

(d') est une droite passant par O et coupe Δ en B et Δ' en B'.

a) Fais une figure.

   b) Les triangles OAB et OA’B’ sont-ils isométriques ?

4) Dessine un triangle ABC non isocèle. De l’autre côté de A par rapport à (BC), construis le point A’ tel que A’B = AC et A’C = AB.
   a) Démontre que les triangles ABC et A’CB sont isométriques.
   b) Quelle est l’isométrie qui transforme ABC en A’CB ?
5) ABC est triangle isocèle en A tel que AB = AC = 2BC. I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [AC].
   a) Démontre que AJB et AJC sont isométriques.
   b) Démontre que JBC et IDC sont isométriques.

Repères cartésiens du plan
Coordonnées d'un point

I. TYPES DE REPERES CARTESIENS

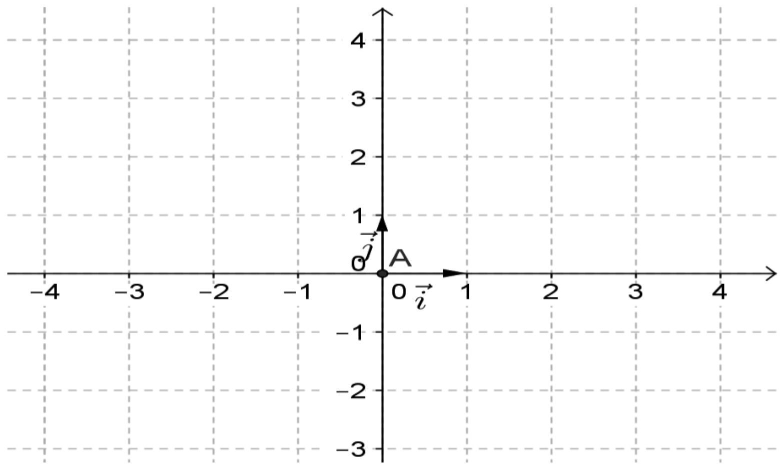
Activité 1

Consigne :

1) Qu'est-ce qu'un axe ?
2) Dessine deux axes de même origine O.

Exemple de réponse

1) Un axe est une droite régulièrement graduée.
2) Figure



Conclusion : Ce système d'axe s'appelle un repère cartésien du plan, qu'on peut noter $(O,\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath})$ où :

- le point O est l'origine du repère ;
- $\vec{\imath}$ est le vecteur unitaire (ou vecteur de base) sur l'axe des abscisses ;
- $\vec{\jmath}$ est le vecteur unitaire (ou vecteur de base) sur l'axe des ordonnées.

Types de repère

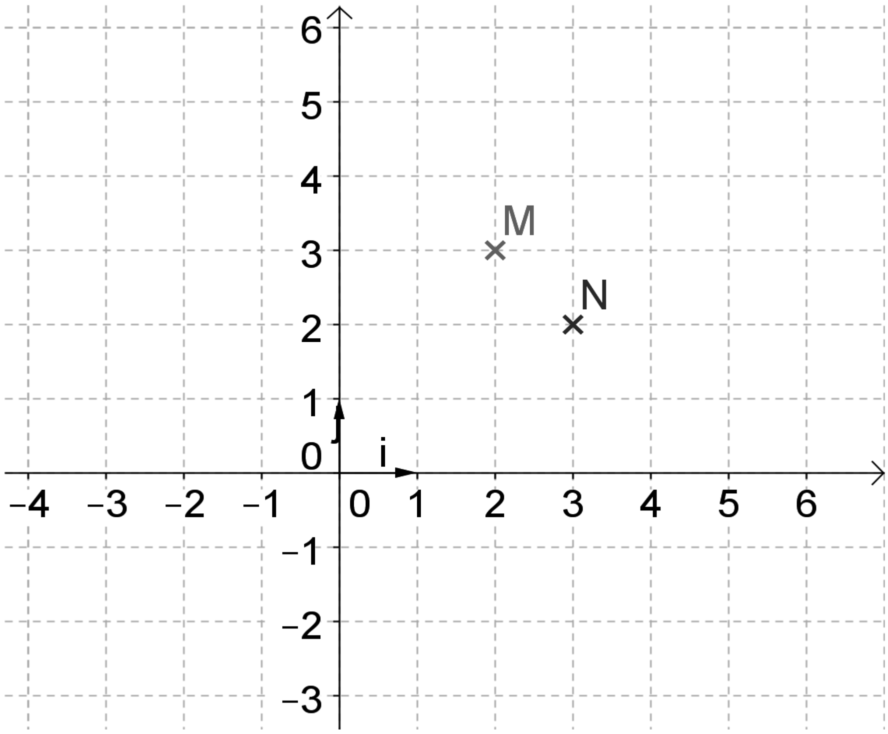
Selon les positions des axes et les longueurs des vecteurs de base, on distingue :

- le repère **orthogonal** : les deux axes sont perpendiculaires ;
- le repère **normé** : les deux vecteurs de base ont même longueur ;

- le repère **orthonormé** : les deux axes sont perpendiculaires et les deux vecteurs de base ont même longueur ; on l'appelle aussi repère orthonormal.
- Le repère quelconque : qui n'est ni **orthogonal**, ni **normé**, ni **orthonormé.**

II. COORDONNEES CARTESIENNES D'UN POINT

Voici un repère cartésien et deux points.



Le point M est repéré par le couple de nombres (2 ; 3).

- Le nombre 2 est l'abscisse de M : l'abscisse d M est notée x_M $donc$ $x_M = 2$.
- Le nombre 3 est l'ordonnée de M : l'ordonnée de M est notée y_M $donc$ $x_M = 3$
  - Les nombres 2 et 3 sont les coordonnées de M, on écrit M(2 ; 3) on lit « M de coordonnées (2 ; 3) » de même N(3 ; 2).

    On a donc (2 ; 3) ≠ (3 ; 2)

Activité 2

Consigne : Dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan, marque les pointsA(4 ; 3), B(3 ; 4), C(-3 ; 4), D(3 ; -4), E(-3 ; -4), F(0 ; 3), G(0 ; -3), H(-3 ; 0), K($\frac{5}{2}$; 0), L($\frac{3}{2}$; $\frac{7}{2}$).

Propriétés

Dans un repère du Plan :

- A chaque point M du plan correspond d'une manière unique ses coordonnées x et y;
- Les coordonnées d'un point du plan étant données, ce point est défini de manière unique dans le plan ;
- Tous les points de l'axe des ordonnées ont une abscisse nulle. Si le point Q est sur l'axe des ordonnées alors Q(0 ; y) ;
- Tous les points de l'axe des abscisses ont une ordonnée nulle. Si le point P est sur l'axe des abscisses alors P(x ; 0) ;
- L'origine d'un repère du plan a pour coordonnées (0 ; 0).

Exercices

1) Dans un repère du plan, marque les points

   A (1 ; 3), B (-2 ; 1), C (-4 ; -2), D (0 ; 4), E (2 ; 0), $F\left(\frac{5}{2};2\right)$, $G\left(5;\frac{9}{2}\right)$

2) Dans un repère orthonormé du plan, marque les points

   A (-4 ; 2), B (-2 ; 4), C (4 ; -2).

   Trace le triangle ABC et affirme sa nature

3) Dans un repère orthonormé du plan, marque les points

   P (-2 ; 2), R (2 ; 6), M (6 ; 2), L (2 ; -2).

   Trace le quadrilatère PRML et affirme sa nature

4) Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, marque les points

   A (-2 ; 2), B (1 ; 5), C (3 ; 3).

   Trace le quadrilatère ABCO et affirme sa nature

5) Construis un triangle ABC rectangle en A tel que

   AB = 3cm et AC = 4cm.

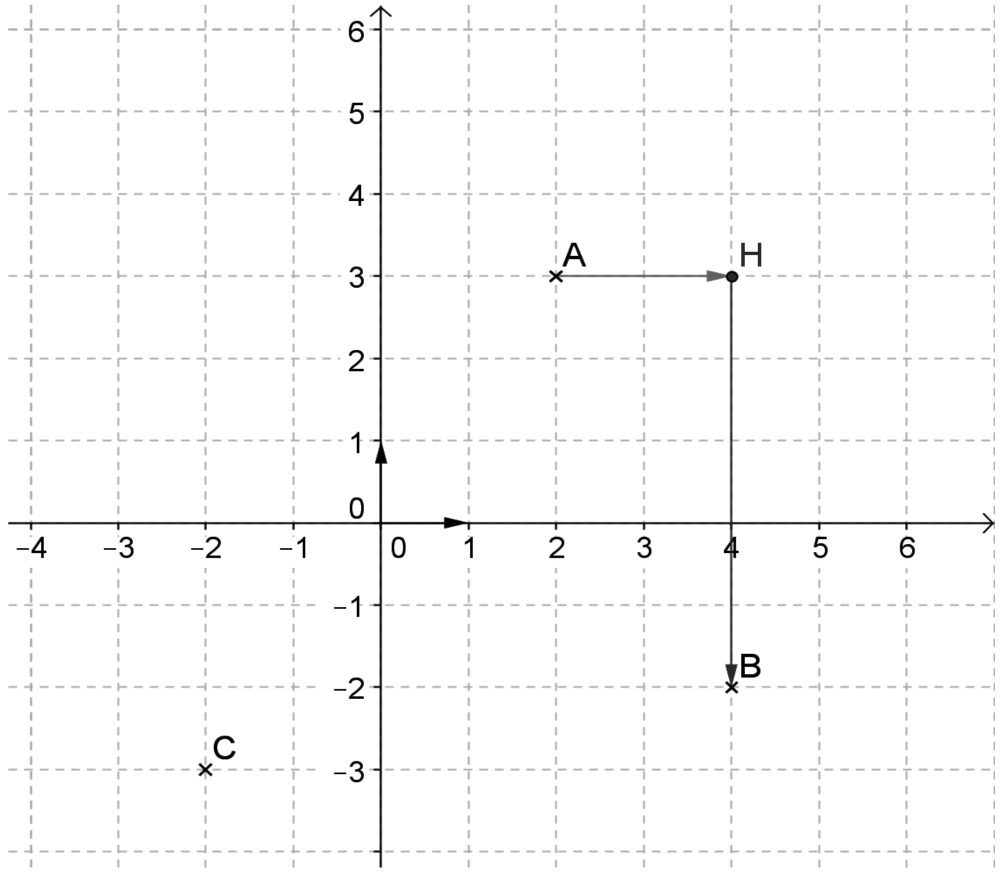
   Donne les coordonnées du milieu O de [BC] et celles du centre de gravité G du triangle ABC dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$

Coordonnées et composantes d'un vecteur

I. COORDONNEES D'UN VECTEUR DEFINI PAR DEUX POINTS

Activité 1

Consigne : Dans le plan muni d'un repère $((o;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, place les points A (2 ; 3), B (4 ; -2) et C (-2 ; -3).



Détermination des coordonnées

Pour aller de A à B, déplaçons-nous horizontalement (de A à H) de 2pas vers la droite (+2) puis verticalement (de H à B) de 5 pas vers le bas (-5). Ainsi le vecteur$\overrightarrow{AB}$. a pour coordonnées (2 ; -5), on écrit $\overrightarrow{AB}\binom{2}{-5}$ ou

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}(2;-5)$, cela correspond au calcul suivant :

$$\overrightarrow{AB}\left|\begin{matrix} x_B - x_A = 4 - 2 = 2 \\ y_B - y_A = -2 - 3 = -5 \end{matrix}\right. \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Consigne 2 : Calcule les coordonnées des vecteurs :

$\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}$. Que remarques-tu ?

$\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}, \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix}, \overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}, \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-6\\-1\end{pmatrix}, \overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$

On remarque que $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CB}$.

Consigne 3 : Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$. Que peux-tu en déduire ?

$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, \overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}, \overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$,

Les coordonnées de $\overrightarrow{OA}$ sont celles de A, de même $\overrightarrow{OB}$ et B ; $\overrightarrow{OC}$ et C.

Calcul de coordonnées : Si $A(x_A;\ y_A)\ et\ B(x_B;\ y_B)$, On a

$\overrightarrow{AB}\left|\begin{matrix}x_B - x_A\\ y_B - y_A\end{matrix}\right.\quad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\ y_B - y_A\end{pmatrix}$

Remarque

- D'une manière générale $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$, on dit que les vecteurs $\overrightarrow{PQ}\ et\ \overrightarrow{QP}$ sont opposés.
- étant l'origine du repère O (0 ; 0) :

  - Si M(x ;y) alors $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

  - Si $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ alors M $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

II. COMPOSANTES D'UN VECTEUR

Dans un repère $((o;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, $\vec{\imath}\binom{1}{0}\ et\ \vec{\jmath}\binom{0}{1}$

Si $\overrightarrow{AB}\binom{2}{-5}$dans le repère $((o;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, alors les composantes de $\overrightarrow{AB}$ sont $2\vec{\imath}$ et -5$\vec{\jmath}$ et on écrit $\overrightarrow{AB}$en fonction de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$; $\overrightarrow{AB} = 2\vec{\imath} - 5\vec{\jmath}$.

Activité 2

Consigne : Le repère étant $((o;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, complète tableau suivant :

Vecteur	Composantes	En fonction de $\vec{\imath} et \vec{\jmath}$
$\overrightarrow{AB}(2;-5)$	$2\vec{\imath}$ et -5$\vec{\jmath}$	$\overrightarrow{AB} = 2\vec{\imath} - 5\vec{\jmath}$
$\overrightarrow{BA}(-2;5)$	$2\vec{\imath}$ et 5$\vec{\jmath}$	$\overrightarrow{BA} = -2\vec{\imath} + 5\vec{\jmath}$
$\overrightarrow{AC}(-4;-6)$	et	
$\overrightarrow{CA}(4;6)$	et	
$\overrightarrow{BC}(-6;-1)$	et	
$\overrightarrow{CB}(6;1)$	et	
	et	$\overrightarrow{OA} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$
	et	$\overrightarrow{0B} = 4\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$
	et	$\overrightarrow{OC} = -2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$

Remarque : Si O est l'origine du repère et

$\overrightarrow{OM} = \mathrm{a}\vec{\imath} + \mathrm{b}\vec{\jmath}$ alors M (a ; b)

Exemple : $\overrightarrow{OA} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$ alors A(2 ; 3)

III. EGALITE DE DEUX VECTEURS

Deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x\prime \\ y\prime \end{pmatrix}$ sont égaux lorsque $\begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$

Activité 3

Consigne : Dans un repère $((o;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, marque les points A (-1 ; 2) ; B (5 ; 3) ; C (3 ; 0) et D (-3 ;-1).

1) Démontre que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.
2) Calcule les coordonnées du point E tel que ACED soit un parallélogramme.

   Rép :

1) $\overrightarrow{AB}\binom{6}{1}$,$\overrightarrow{DC}\binom{6}{1}donc\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ alors ABCD est un parallélogramme.

2) $ACED\ est\ un\ parallélogramme\ alors\ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DE}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DE}$ *équivaut* à $\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_E - x_D \\ y_E - y_D \end{pmatrix}$ $\quad E(1\ ;\ -3)$

IV. COORDONNEES DE $\vec{u}+\vec{v}$ et $k\vec{u}$

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et k un réel non nul ;

$(\vec{u}+\vec{v})\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$; $k\vec{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$

Activité 4

Consigne : On donne $\vec{u}(1;-2)$ et $\vec{v}(3;2)$

Calcule les coordonnées des vecteurs $\vec{u}+\boldsymbol{\vec{v}}$; $\boldsymbol{\vec{u}-\vec{v}}$; $\boldsymbol{3\vec{u}}$; $-\vec{v}$ *et* $3\,\vec{u}-\vec{v}$;

$\vec{u}+\vec{v}(4;0)$; $\vec{u}-\vec{v}(-2;-4)$; $3\vec{u}(3;-6)$; $-\vec{v}(-3;-2)$; $3\vec{u}(3;-6)$;

$$(3\,\vec{u}-\vec{v})(0;-8)$$

V. COORDONNEES DU MILIEU D'UN SEGMENT

Soit M le milieu du segment [AB], on a : $x_M = \frac{x_A+x_B}{2}$ *et* $y_M = \frac{y_A+y_B}{2}$

$M\left(\frac{x_A+x_B}{2}\,;\,\frac{y_A+y_B}{2}\right)$

Activité 5

Consigne : On donne les points

A(-1 ;2) ; B(5 ;3) ; C(3 ;0) et D(-3 ;-1).

Calcule les coordonnées des points M, K et L milieux respectifs des segments [AD], [AC] et [BD].

Rép : $M\left(-2\,;\frac{1}{2}\right)$; $K(1\,;1)$ $etL(1\,;1)$

K = L donc les diagonales ABC D ont le même milieu alors ABCD est un parallélogramme.

VI. POINTS ALIGNES

Vecteurs colinéaires :

Deux vecteurs $\mathbf{\vec{u}}\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$ et $\mathbf{\vec{v}}\begin{pmatrix} \mathbf{a'} \\ \mathbf{b'} \end{pmatrix}$ sont colinéaires lorsque :

$\boldsymbol{ab' = ba'}$ *ou* $\boldsymbol{ab' - ba' = 0}$.

Points alignés : Trois points A, B et C sont alignés lorsque les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Activité 6

Consigne 1 : Dans les cas suivants les vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{\vec{v}}$ sont-ils colinéaires ?

a) $\vec{u}\binom{2{,}5}{5}$ et $\vec{v}\binom{5}{1}$

b) $\vec{u}\binom{1}{3}$ et $\vec{v}\binom{5}{2}$

Exemple de réponse

a) 25×1= 5×5 alors $\vec{u}\ et\vec{\vec{v}}$ sont colinéaires.

b) $1\times2\ \neq 3\times 5$alors $\vec{u}\ et\ \vec{v}\ ne$ sont pas colinéaires.

Consigne 2 : On donne les points $\mathrm{B}(5\,;3)$; $C(3\,;0)\ et\ \ E(1\,;\ -3)$.

Les points B, C et E sont-ils alignés ?

Exemple de réponse

$\overrightarrow{BC}\binom{-2}{-3}, \overrightarrow{BE}\binom{-4}{-6}(-2).(-6) = (-3).(-4)$ alors les points sont alignés.

VII. COORDONNEES ET TRANSFORMATIONS DU PLAN

Activité 7

Consigne : Dans un plan muni d'un repère $(o; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$, on donne le point P(-2 ; -1) et le vecteur $\vec{u}(2; 3)$.

1) Traduis chacune des phrases suivantes par une égalité vectorielle :
   a) Q est le transformé de P par la translation de vecteur$\vec{u}$.
   b) R est l'image de P par rapport à Q.
   c) S est l'image de P par l'homothétie de centre O et de rapport -2.
2) Calcule les coordonnées des points Q, R et S.

Exercices

1) Le plan est rapporté à un repère$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

   On donne les points A ; B ; C ; D ; E ; F ; G définis par :

   $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 2\vec{\imath} + 5\vec{\jmath}$; $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 6\vec{\imath} - \vec{\jmath}$; $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = -4\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$; $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = -2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$;

   $\overrightarrow{OE} = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$; $\overrightarrow{OF} = -\vec{\imath} - \vec{\jmath}$; $\overrightarrow{OG} = 3\vec{\imath}$

   a) Place ces points dans le repère.

   b) Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{EF}$; $\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{AC}$.

   c) Les points I, J, K, L sont les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD], [DA].

      Calcule les coordonnées des points I, J, K, L.

   d) Démontre que le quadrilatère IJKL est un parallélogramme.

   e) Calcule les coordonnées des points P et Q tels que :

      $\overrightarrow{EP} = \overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{EQ} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EG}$

2) Dans les cas suivants, les points A, B et C sont-ils alignés ?

   a) A (1 ; -1), B (2 ; 3), C (4 ; 7)   c) A (0 ; 0), $B(-\sqrt{2}$; 3), C(4 ; 1)

   b) A (-1 ; 2), B (1 ; 5), C (3 ; 8)d) $A\left(0;\frac{5}{4}\right), B(1;0), C(4;\ -\frac{15}{4})$

3) Le plan est rapporté à un repère$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on donne les points A (2 ; -1), B (1 ; 3) et $E\left(-\frac{5}{2};y\right)$

   a) Exprime $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$; $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ en fonction de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

   b) Calcule y pour que les points B, C, E soient alignés.

4) Le plan est rapporté à un repère$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

   Soit A (1 ; 5) et B (-4 ; 3)

   Calcule les coordonnés du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$.

   Même question avec A (-5 ; 7) et B (0 ; 1)

5) Le plan est rapporté à un repère$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

   Soit A(1 ; 2), B(-5 ; 2), $C(\sqrt{3};1)$.

   Calcule les coordonnées des points E, F, G, H définies par :

$$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC};\ \overrightarrow{CG} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CB};\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CH} = \vec{0}$$

6) Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les points A (2 ; 3) et I(4 ; 5).

   a. Calcule les coordonnées du point M image du point A dans la symétrie de centre I : $M = S_I(A)$.

   b. Calcule les coordonnées du point N image du point A par la translation de vecteur $\vec{V}(1; -3)$.

   c. Calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MN}$.

Equation d'une droite

Une droite est déterminée par :

- la donnée de deux de ses points ;
- la donnée d'un de ses points et sa direction (vecteur directeur)

I. EQUATION D'UNE DROITE DEFINIE PAR DEUX POINTS

Activité 1

Dans un repère du plan, marque les points A (2 ; -3) et B (0 ; 2).

Consigne 1 : Soit un point M(x ; y). Détermine une relation entre x et y pour que les points A, B, M soient alignés.

Indication :

$\overrightarrow{\mathbf{AM}}\binom{x-2}{y+3}$ et $\overrightarrow{\mathbf{AB}}\binom{-2}{5}$. **A, B, M** sont alignés lorsque $\overrightarrow{\mathbf{AM}}$ et $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ sont colinéaires c'est-à-dire si $5(x-2) = -2\,(y+3)$.Cette relation est appelé équation de la droite passant par les points A et B.

Equation de la droite (AB)

Si $A\ (x_A\ ;\ y_A)\ et\ B(x_B\ ;\ y_B)$, une équation de la droite (AB) est :

$$(\mathbf{y_B} - \mathbf{y_A})(\mathbf{x} - \mathbf{x_A}) - (\mathbf{x_B} - \mathbf{x_A})(\mathbf{y} - \mathbf{y_A}) = \mathbf{0}$$

Consigne 2 : Dans un repère du plan, on donne les points A (2 ; -3), B (0 ; 2) et C (-3 ; 1). Détermine une équation de chacune des droites (AC) et (BC).

II. EQUATION D'UNE DROITE DEFINIE PAR UN POINT ET UN VECTEUR DIRECTEUR

Activité 2

Consigne 1 : soient les points A (1 ; 4) et M (x ; y) et un vecteur $\vec{\mathbf{u}}\binom{2}{3}$.

Détermine une relation entre x et y pour que les vecteurs $\overrightarrow{\mathbf{AM}}$ et $\vec{\mathbf{u}}$ soient colinéaires.

Equation de la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{\mathbf{u}}$

L'équation de la droite passant par un point A (x_A ; y_A) et de vecteur directeur $\vec{\mathbf{u}}\binom{a}{b}$ est : $\boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_A}) - \boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_A}) = \mathbf{0}$

Consigne 2 : Détermine une équation de la droite (d) passant par B (3 ; 1) et de vecteur directeur $\vec{\mathbf{u}}\binom{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$.

III. VECTEUR DIRECTEUR D'UNE DROITE

- Le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ est un vecteur directeur de la droite (AB) et tout vecteur colinéaire à $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ c'est-à-dire tout vecteur de la forme $k\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ avec k ≠ 0.
- La droite d'équation $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$ a pour vecteur directeur $\vec{\mathbf{u}}\binom{-\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$ et tout vecteur de la forme $\boldsymbol{k\vec{u}}$ est aussi un vecteur directeur de la droite (AB)

Activité 3

Consigne 2 : Trouve un vecteur directeur de chacune des droites :

(d) : 5x + 2y = 3 ; (Δ) : 2x – 3y + 6 = 0

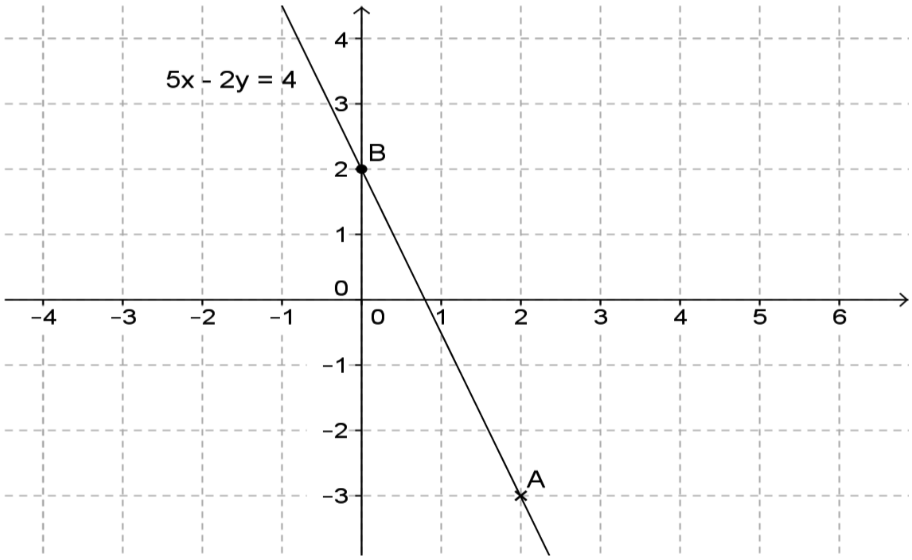
IV. REPRESENTATION GRAPHIQUE D'UNE DROITE

Point et droite : Un point appartient à une droite si ses coordonnées vérifient l'équation de cette droite.

Méthode : Pour représenter une droite connaissant son équation, il suffit de, déterminer les coordonnées de deux points de cette droite, placer ces deux points dans un repère du plan et tracer la droite passant par ces deux points.

Exemple : Soit à représenter la droite d'équation : 5x – 2y = 4

Les points A(2 ; -3) et B(0 ; 2) sont deux points de cette droite . Il suffit de placer ces deux points dans un repère et tracer la droite passant par les points A et B.



Activité 4

Consigne 2 : Dans un repère du plan, construis les droites

(d) : $5x + 2y = 3$; (Δ) : $2x - 3y + 6 = 0$

Indication :

Pour (d) : A (-1 ; 4) et B (1 ; -1)

Pour (Δ) : C (0 ; 2) et D (-3 ; 0)

V. INTERSECTION DE DEUX DROITES

Méthode : Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection M de deux droites (d) et (d'), on résout le système formé par les équations de (d) et (d'). Le couple solution du système représente les coordonnées du point M. $(d) \cap (d') = \{M\}$

Activité 5

Consigne 2 : Les droites (Δ) et (Δ') ont pour équations respectives

$x - 2y + 1 = 0$ et $2x - y = -2$.

Calcule et retrouve graphiquement les coordonnées du point M tel que

$(\Delta) \cap (\Delta') = \{M\}$

Exercices

Dans tous les exercices qui suivent le plan est muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) Détermine une équation de la droite (AB) dans les cas suivants :

   a) A (0 ; 1) et B (3 ; 0) ;   d) A (0,36 ; -1) et B (0 ; 0)

   b) A (8 ; -5) et B (2 ; 1) ; e) $A\ (4\sqrt{2}\ ;\ 1)\ et\ B\ (-5\sqrt{3}\ ;\ 1)$

   c) A (-3 ; 4) et B (3 ; -4) ; f) $A\ (2\ ;\ \frac{3}{2})\ et\ B\ (-5\ ;\ 8)$

2) Détermine une équation de la droite (Δ) définie par le point A et le vecteur $\vec{u}$ dans les cas suivants :

   a) $A(0; 0)\ et\ \vec{u}(1; 2);$ $d)\ A(-3; 4)\ et\ \vec{u}(0; 1);$

   b) $A(1; 2)\ et\ \vec{u}(1; 0);$ $e)\ A\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)\ et\ \vec{u}(4; 3)$

   c) $A(-16; 15)\ et\ \vec{u}\left(3\sqrt{2}; -1\right);$ $f)\ A\left(\sqrt{2}; 1\right)\ et\ \vec{u}\left(1; \sqrt{2}\right)$

3) Détermine un vecteur directeur de chacune des droites :

   $d_1: 2x - y + 3 = 0;$ $d_2: -x\sqrt{2} + 4 = 0;$

   $d_3: y = 0;$ $d_4: x + 18y - 7 = 0;$

   $d_5: 4x + 5y - 7 = 0;$ $d_6: -3x + y\sqrt{2} + 8\sqrt{3} = 0;$

4) Détermine l'intersection des droites (Δ) et (Δ'), par calcul et graphiquement :

   a) $(\Delta): x + 2y = 4;$ $(\Delta'): 3x - 5y = -8$

   b) $(\Delta): 3x - 5y = -8$; $(\Delta'): x + 3y = 1$

   c) $(\Delta): y = 3x - 2;$ $(\Delta'): y = 2x - 3$

5) On donne les points A (2 ; 3), B (5 ; 7) et C (-6 ; -8)

   a) Détermine une équation de la droite (AB).

   b) Le point E de la droite (AB) a pour abscisse -4. Détermine son ordonnée.

   c) Détermine l'abscisse du point F de la droite (AB) d'ordonnée 4.

6) On donne les point A et B de coordonnées respectives (a, 0) et (0 ; b) avec $ab \neq 0$.

   a) Trouve une relation de la forme $px + qy = r$ caractérisant la droite (AB).

   b) Montre que cette équation peut se mettre sous la forme

   $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

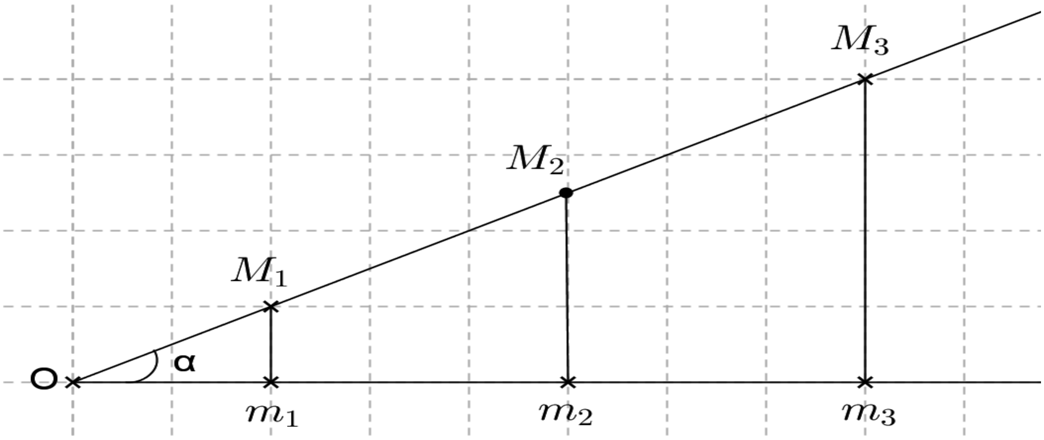
7) Dans un repère orthonormé, place quelques points dont les coordonnées vérifient l'équation $y = x^2$. Est-ce que $y = x^2$ est l'équation d'une droite ?

Cosinus d'un angle aigu

I. DEFINITION ET CALCUL DU COSINUS D'UN ANGLE AIGU

Activité 1

Consigne 1 : Soit un secteur angulaire $[\mathbf{x\widehat{O}y}]$ d'angle α. Les points m_1, m_2 et m_3 de [Ox) sont les projetés orthogonaux des points M_1, M_2 et M_3 de [Oy) sur [Ox).



En utilisant la figure et une règle graduée, trouve la mesure de la longueur de chacun des segments suivants : $[Om_1]$, $[Om_2]$, $[Om_3]$, $[OM_1]$, $[OM_2]$, $[OM_3]$.

Calcule les rapports $\frac{\mathbf{Om1}}{\mathbf{OM1}}$; $\frac{\mathbf{Om2}}{\mathbf{OM2}}$ **et** $\frac{\mathbf{Om3}}{\mathbf{OM3}}$ que constates-tu ?

Conclusion : La valeur commune de ces rapports s'appelle le cosinus de l'angle aigu α. On le note $\mathbf{cos\alpha} = \frac{\mathbf{Om}}{\mathbf{OM}}$. Ce rapport ne dépend pas de l'unité choisie.

Définition

Le triangle mOM étant rectangle en m, le côté [OM] est **l'hypoténuse** et le côté [Om] s'appelle **côté adjacent** pour l'angle α.

$$Ainsi\ \mathbf{cos\alpha} = \frac{\mathbf{Om}}{\mathbf{OM}} = \frac{\text{côté } \mathbf{adjacent}}{\mathbf{hypot}\text{é}\mathbf{nuse}}$$

Consigne 2 : Construis un triangle ABC rectangle en A tel que :

AB = 3cm et $\widehat{\mathbf{ABC}} = \mathbf{60°}$ **.** Mesure BC puis calcule Cos60°.

II. PROPRIETE DU COSINUS D'UN ANGLE AIGU

- Le triangle mOM étant rectangle en m, alors $\mathbf{cos\alpha} = \frac{\mathbf{Om}}{\mathbf{OM}}$
  - Si $\alpha = 0$ alors $Om = OM$ et $\cos 0° = 1$
  - Si $\alpha = 90°$ alors $Om = 0$ et $\cos 90° = 0$
- Un angle aigu est un angle dont la mesure est comprise entre 0° et 90°
  - Le cosinus d'un angle aigu est entre 0 et 1.
    Si α est angle aigu alors $0 < \cos \boldsymbol{\alpha} < 1$
  - Tout nombre réel a compris entre 0 et 1 correspond au cosinus d'un et d'un seul angle aigu α tel que $\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{a}$
  - A tout angle **α** tel que $0° \leq \boldsymbol{\alpha} \leq 90°$ correspond un réel $\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha}$ tel que $1 \geq \cos \boldsymbol{\alpha} \geq 0$

Activité 2

Consigne : Parmi les réels suivants, quels sont ceux qui peuvent être des cosinus d'angle aigu ? Pourquoi ?

0,14 ; $\frac{5}{3}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{9}{2}$; π

Exercices

1) Dessine un triangle rectangle en A tel que

   AB = 3cm ; AC = 4cm et BC = 5cm.

   a) Complete les phrases suivantes :

- Le côté … est l'hypoténuse du triangle ABC.
- Pour l'angle $\widehat{\mathbf{ABC}}$ le côté adjacent est …
- Pour l'angle $\widehat{\mathbf{ACB}}$ le côté adjacent est …

   b) Calcule **Cos**$\widehat{\mathbf{ABC}}$ et **Cos**$\widehat{\mathbf{ACB}}$

2) Dans un triangle EFG rectangle en E, FG = 4,5 cm et cos $\hat{G}$ = 0,8. Calcule EG.

3) Construis un triangle isocèle ABC tel que :

   AB = AC = 6cm et $\widehat{BAC} = 120°$

   a) Calcule la longueur du côté [BC].

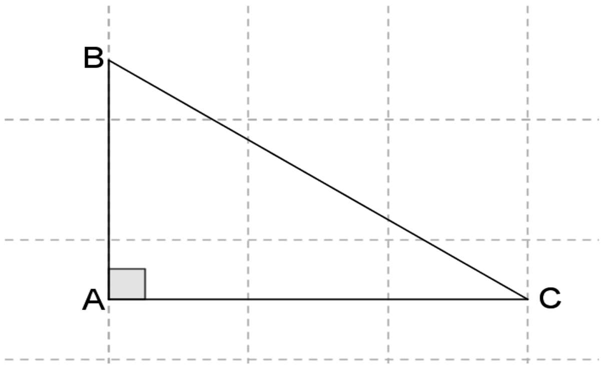
   b) Calcule la longueur de la hauteur relative au côté [BC].

   On donne $\cos 60° = \frac{1}{2}$; $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Relations métriques dans le triangle rectangle-Théorème de Pythagore

I. RELATIONS METRIQUES DANS LE TRIANGLE RECTANGLE

Rappel : Un triangle rectangle est un triangle qui a un angle droit.

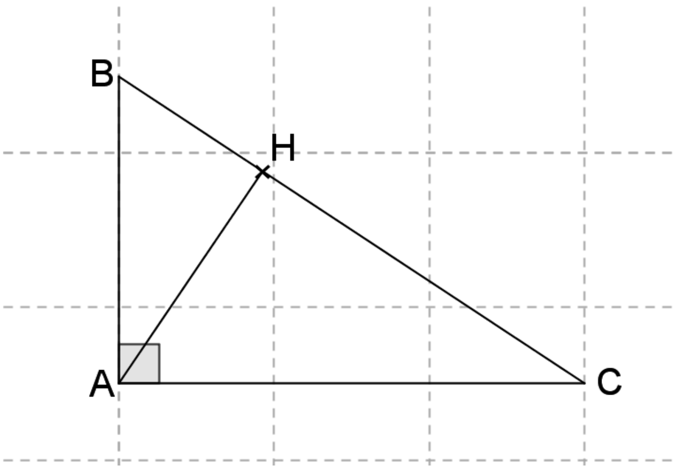


Dans ce triangle, le plus grand côté [BC] s'appelle hypoténuse et les deux autres côtés [AB] et [AC] sont les côtés de l'angle droit.

Activité 1

Soit un triangle ABC rectangle en A et [AH] sa hauteur issue de A.

On dit que H est le pied de la hauteur issue de A.



Consigne 1 :

Trouve deux rapports égaux à $\mathbf{cos}\,\widehat{\boldsymbol{B}}$ et deux rapports égaux à $\mathbf{cos}\,\widehat{\boldsymbol{C}}$

Exemple de réponse

$Dans\ le\ triangle\ ABC\ rectangle\ en\ A\ \ \cos\hat{B} = \frac{AB}{BC}\ et\ \cos\hat{C} = \frac{AC}{BC}$

$Dans\ le\ triangle\ ABH\ rectangle\ en\ H\ \ \cos\hat{B} = \frac{BH}{AB}$

$Dans\ le\ triangle\ AHC\ rectangle\ en\ H\ \ \cos\hat{C} = \frac{CH}{AC}$

Consigne 2 :

Déduis de la consigne1 l'expression de **AB^2** et celle de **AC^2** appelées relations métriques dans le triangle rectangle ABC ci-dessus.

Exemple de réponse

$Des\ deux\ rapports\ de\ \ \cos\hat{B}\ , on\ a\ :\ \frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB}\ équivaut$ à

$\mathbf{AB^2 \ = \ BHxBC \quad (1)}$

$Des\ deux\ rapports\ de\ \ \cos\hat{C}\ , on\ a\ :\ \frac{AC}{BC} = \frac{CH}{AC}\ équivaut$ à

$\mathbf{AC^2 \ = \ CHxBC \quad (2)}$

Théorème : Si ABC est un triangle rectangle en A et [AH] sa hauteur, on a :

$\mathbf{AB^2 \ = \ BHxBC \quad (1)}$

$\mathbf{AC^2 \ = \ CHxBC \quad (2)}$

II. THEOREME DE PYTHAGORE

Activité 2

Soit un triangle ABC rectangle en A et [AH] sa hauteur.

On a :$AB^2 \ = \ BHxBC(1) \ \ et \ \ AC^2 \ = \ CHxBC \quad (2)$

Consigne 1 : Déduis des relations (1) et (2) l'égalité $AB^2 \ + \ AC^2 \ = \ BC^2$

Exemple de réponse

$\left.\begin{array}{l} AB^2 = \ BHxBC \quad (1) \\ AC^2 = \ CHxBC \quad (2) \end{array}\right. \ en\ ajoutant\ membre$ à $membre\ les$ égalité $(1) et\ (2),$

$on\ obtient\ AB^2 + AC^2 = BC^2$

$La\ relation\ \ AB^2 + AC^2 = BC^2\ est\ \ appel$é $relation\ de\ Pythagore$

Enoncé du théorème de Pythagore : Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

Calcul des longueurs des côté du triangle rectangle

Si le triangle ABC est rectangle en A alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$

$Longueur\ de\ l'hypoténuse$: $\boldsymbol{BC = \sqrt{AB^2 + AC^2}}$

$Longueur\ des\ côtés\ de\ l'angledroit$:

$\boldsymbol{AB = \sqrt{BC^2 - AC^2}}$ et $\boldsymbol{AC = \sqrt{BC^2 - AB^2}}$

Consigne 2 : Dans un triangle LIT rectangle en L :

a) Calcule LI sachant que IT = 17 et TL = 15.
b) Calcule IT sachant que LI = 12 et LT = 5.

III. RECIPROQUE DU THEOREME DE PYTHAGORE

Enoncé de la réciproque du théorème de Pythagore : Dans un triangle, si le carré du plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés alors le triangle est rectangle.

Pour démontrer qu'un triangle est rectangle, on utilise la réciproque du théorème de Pythagore.

Activité 3

Consigne 1 : Un triangle ABC tel que AB = 3 ; AC = 4 et BC = 5 est-il rectangle ?

Consigne 2 : Un triangle RAS tel que RA = 85 ; AS = 77 et SR = 36 est-il rectangle ?

Remarque : On peut démontrer qu'un triangle est rectangle en montrant qu'il a un angle droit.

Consigne 3 : Construis Un triangle ABC tel que

BC = 7cm; $\widehat{\mathbf{BCA}} = \mathbf{37}°$ et $\widehat{\mathbf{ABC}} = \mathbf{53}°$

1. Prouve que le triangle ABC est rectangle.
2. Calcule les longueurs des deux côtés du triangle.
   On donne cos37° = 0,79.

Indication :

$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$ alors $\widehat{A} = 90°$ par suite le triangle ABC est rectangle en A

Exercices

1) Un triangle ABC a les caractéristiques suivantes :

   $\mathrm{AC} = \dfrac{10\sqrt{3}}{3}$; $\mathrm{AB} = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$; et $\mathrm{BC} = 5$

   Ce triangle est-il rectangle ?

2) ABC est un triangle rectangle en A et [AH] sa hauteur.

   Sachant que AB = 6 et AC = 10, calcule : $\cos \hat{B}$, BH, CH et AH.

3) Dans les cas suivants, ABC est un triangle rectangle en A et H le pied de la hauteur issue de A.

   a) AC = 11,2 cm ; AB = 6,6 cm. Calcule BC, CH, BH et AH.

   b) AC = 2 cm ; AB = $\sqrt{5}$ cm. Calcule BC, CH, BH et AH.

   c) AC = 3 cm ; AB = 6,6 cm. Calcule BC, CH, BH et AH.

   d) AC = 17 cm ; AH = 2,4 cm. Calcule CH.

4) ABC est un triangle rectangle en A.

   $\mathrm{BC} = 2\mathrm{a}$ et $\mathrm{AB} = \mathrm{a}\sqrt{3}$. Calcule AC.

5) Soit ABC un triangle isocèle de sommet principal A tel que AB = 6 cm et BC = 8 cm.

   On désigne par H le pied de la hauteur issue de A. La perpendiculaire à (AB) en A coupe la droite (BC) en F.

   a) Fais un dessin.

   b) Calcule les distances BH et AH.

   c) Calcule le cosinus de l'angle ABH.

   d) Utilise ce résultat pour calculer la mesure du côté [BF] dans le triangle rectangle ABF.

6) Soit ABC un triangle rectangle en A. on désigne par H le pied de la hauteur issue de A.

   a) Construis ce triangle sachant que $\hat{B} = 60^0$ et AB = 4 cm.

   b) Calcule BC, AC, BH, HC et AH. On donne $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$.

7. On donne un triangle ABC rectangle en A, dans lequel l'hypoténuse [BC] mesure 5,8cm et le côté [AB] 4cm.

   Calcule AC et la longueur de chacune des trois médianes.

8. Un triangle ABC rectangle en A est tel que : $BC = 4\sqrt{3}\ et\ AC = 6$

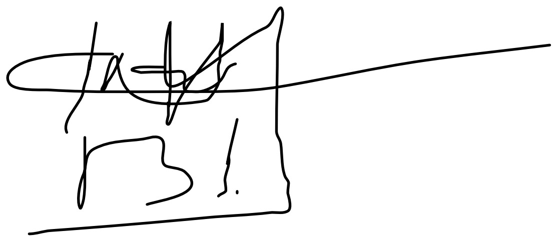
a) Calcule AB.

b) Calcule $\cos\widehat{ABC}\ et\ \cos\widehat{ACB}$

9) On considère un triangle OAB rectangle en O tel que :

   OA = 4cm ; OB = 5cm.

   a) Construis le cercle ($\mathcal{C}$) de diamètre [AB] et la droite tangente (T) en A à ce cercle qui coupe (OB) en K.
   b) Calcule AB ; BK ; OK et AK.
   c) Détermine le point I centre de ($\mathcal{C}$) et le point I', symétrique de I par rapport à A.
   d) Construis le point L, image de I' dans la translation du vecteur $\overrightarrow{KI}$ puis montre que le quadrilatère KILI' est un parallélogramme.



Conditions de parallélisme de deux droites

I. RECONNAITRE DEUX DROITES PARALLELES

Deux droites parallèles ont même direction.

Les deux droites ont une équation de la forme : $\mathbf{ax + by + c = 0}$

Soit (d) : $\mathbf{a}x + \mathbf{b}y + c = 0$ et (d’) : $\mathbf{a}'x + \mathbf{b}'y + c' = 0$

(d) // (d’) lorsque $\mathbf{ab}' = \mathbf{ba}'$ ou $\mathbf{ab}' - \mathbf{ba}' = \mathbf{0}$

Les deux droites ont une équation de la forme : $\mathbf{y = ax + b}$

Soit (Δ) : $y = \mathbf{a}x + b$ et (Δ’) : $+ y' = \mathbf{a}'x + b'$

(Δ) // (Δ’) lorsque $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$

Théorème : Deux droites parallèles ont même coefficient directeur.

Propriété : Si deux droites sont parallèles, tout vecteur directeur de l’une est aussi vecteur directeur de l’autre.

Activité 1

Consigne 1 : Trouve la position relative des deux droites (Δ) et (Δ’) dans les cas suivants :

a) (Δ) : $\mathbf{\frac{2}{3}x + \frac{5}{4}y = 1}$ et (Δ’) : 8x + 15y = 12

b) (Δ) : 3x + 2y = 10 et (Δ’) : 2x – 3y = -2

Consigne 2 : Les droites (d) et (d’) sont-elles parallèles dans les cas suivants ?

a) (d): $\mathbf{y = \frac{3}{2}x + 5}$et (d’) : y = 1,5x – 2

b) (d) : $y = \frac{6}{4}x + \frac{1}{2}$ et (d’) : $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$

II. DROITES PARALLELES ET REPERE DU PLAN

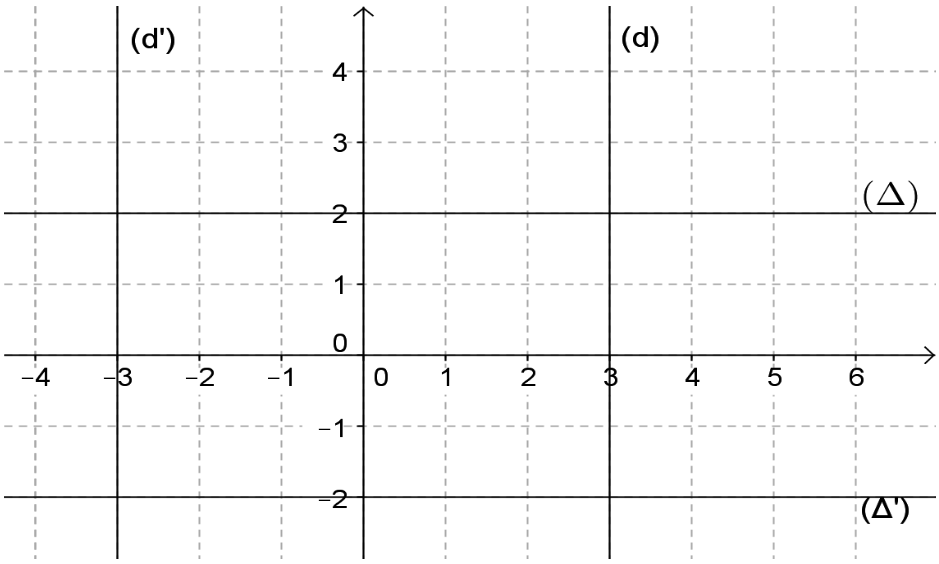
Théorème :

- Toute droite dont l'équation peut s'écrire sous la forme $\boldsymbol{x = a}$ (avec a $\in \mathbb{R}$) est parallèle à l'axe des ordonnées.
- Toute droite dont l'équation peut s'écrire sous la forme $\boldsymbol{y = b}$ (avec a $\in \mathbb{R}$) est parallèle à l'axe des abscisses.

Exemples :

(d) : x = 3 ; (d') : x = -3

(Δ) : y = 2 ; (Δ) : y = -2



III. EQUATION D'UNE DROITE PASSANT PAR UN POINT ET PARALLELE A UNE DROITE CONNUE

Activité 2

Consigne 1 : Détermine une équation de la droite (Δ) passant par A (-3 ; 1) et parallèle à la droite (d) d'équation : x + 4y + 7 = 0.

Consigne 2 : Détermine une équation de la droite (Δ') passant par B (1 ; 2) et parallèle à la droite (d') d'équation : $y = -5x + 1$

Exercices

1) Dans les cas suivants, les droites (Δ) et $(\boldsymbol{\mathcal{D}})$ sont-elles parallèles ?

   a) $(\Delta): 2x - 3y = 2$ et $(\mathcal{D}): -2x + 3y = 1$

   b) $(\Delta): x + y = 0$ et $(\mathcal{D}): 2x + 2y = -5$

   c) $(\Delta): x - y = -2$ et $(\mathcal{D}): x + y = 6$

   d) $(\Delta): y = \frac{5}{2}x + 3$ et $(\mathcal{D}): y = 2{,}5x - 3$

   e) $(\Delta): x\sqrt{3} - y = 4$ et $(\mathcal{D}): 3x - y\sqrt{3} = -7$

   f) $(\Delta): \quad y = \frac{5\sqrt{3}}{3}x - 1$ et $(\mathcal{D}): y = \frac{5}{\sqrt{3}}x + 2$

2) Détermine une équation de la droite $(\boldsymbol{\mathcal{D}})$ passant par A et parallèle à (Δ).

   a) A (1 ; 3) et (Δ) : 5x – 3y = -4

   b) A (0 ; 0) et (Δ) : y = -2x + 5

   c) A $(3\,;\, -\sqrt{2})$ et (Δ) : x – 3 = 0

   d) A (0 ; 17) et (Δ) : $x\sqrt{3} - y = -17$

3) Dans un repère orthonormé du plan, on donne les points

   A (0 ; 3) ; B (-4 ; 0) ; D (2 ; 0) et C (0 ; a) a $\in \mathbb{R}$.

   Détermine le réel a pour que les droites (AB) et (CD) soient parallèles.

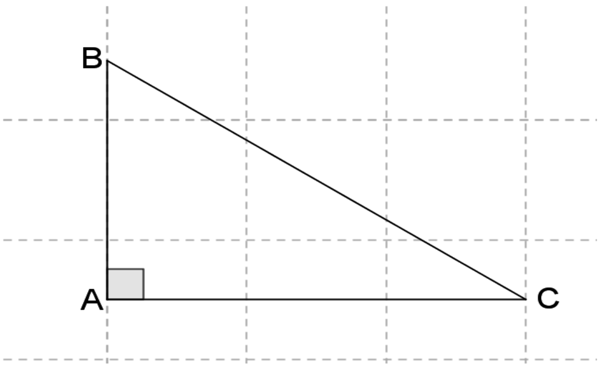
Trigonométrie pratique

I. LES RAPPORTS TRIGONOMETRIQUES

Les rapports trigonométriques pour un angle sont : le sinus (**sin**), le cosinus (**cos**), la tangente (**tg** ou **tan**) et la cotangente (**cotg** ou **cotan** ou **tan**$^{-1}$).

Remarque : Les notations cos, sin, tan et tan^{-1} se trouvent sur les calculatrices scientifiques

Nous allons définir ces rapports dans un triangle rectangle.



Le triangle ABC est rectangle en A. Le coté [BC] est l'hypoténuse.

Pour l'angle $\widehat{ABC} = \hat{B}$: [AB] est le coté adjacent et [AC] est le coté opposé.

Pour l'angle $\widehat{ACB} = \hat{C}$: [AC] est le coté adjacent et [AB] est le coté opposé.

On appelle sinus de l'angle $\hat{B}$, le rapport

$$\frac{coté\ opposé}{hypoténuse} \qquad donc \qquad \mathbf{sin}\,\widehat{\boldsymbol{B}} = \frac{\boldsymbol{AC}}{\boldsymbol{BC}}$$

On appelle cosinus de l'angle $\hat{B}$, le rapport

$$\frac{coté\ adjacent}{hypoténuse} \qquad donc \qquad \mathbf{cos}\,\widehat{\boldsymbol{B}} = \frac{\boldsymbol{AB}}{\boldsymbol{BC}}$$

On appelle tangente de l'angle $\hat{B}$, le rapport

$$\frac{coté\ opposé}{coté\ adjacent} \qquad donc \qquad \mathbf{tan}\,\widehat{\boldsymbol{B}} = \frac{\boldsymbol{AC}}{\boldsymbol{AB}}$$

On appelle cotangente de l'angle $\hat{B}$, le rapport

$$\frac{coté\ adjacent}{coté\ opposé} \qquad donc \qquad \mathbf{cotan}\,\widehat{\boldsymbol{B}} = \frac{\boldsymbol{AB}}{\boldsymbol{AC}}$$

Quelques valeurs usuelles

Angle en degrés	**0**	**30**	**45**	**60**	**90**
Angle en radians	**0**	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Sinus (sin)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cosinus (cos)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Tangente (tan)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

II. RELATIONS ENTRE LES RAPPORTS TRIGONOMETRIQUES D'UN ANGLE AIGU

Activité 1

Consigne : Construis un triangle ABC rectangle en A tel que $\widehat{ACB} = x$

1) Détermine cos(x) , sin(x) et tan(x).
2) Calcule $\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ et compare-le à tan(x).
3) Ecris le théorème de Pythagore pour le triangle ABC.
4) Ecris le théorème de Pythagore en fonction de cos(x) et sin(x).

Relations fondamentales de la trigonométrie

$$\textit{Pour tout angle } x, \qquad \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \qquad \textit{et} \qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

III. TABLES TRIGONOMETRIQUES

Activité 2

Consigne : Utilise la table trigonométrique pour déterminer :

Cos 16°, sin 35° , tan44°, cos 76°, sin75°, tan89°.

Angle	Sinus	Tangentes	Cotangentes	Cosinus	
1	0,0175	0,0175	57,2900	0,9998	89
2	0,0349	0,0349	28,6363	0,9994	88
3	0,0523	0,0524	19,0811	0,9986	87
4	0,0698	0,0699	14,3007	0,9976	86
5	0,0872	0,0875	11,4301	0,9962	85
6	0 ,1045	0,1051	9,5144	0,9945	84
7	0,1219	0,1228	8,1443	0,9925	83
8	0,1392	0,1405	7,1154	0,9903	82
9	0,1564	0,1584	6,3138	0,9877	81
10	0,1736	0,1763	5,6713	0,9848	80
11	0,1908	0,1944	5,1446	0,9816	79
12	0,2079	0,2126	4,7046	0,9781	78
13	0,2250	0,2309	4,3315	0,9744	77
14	0,2419	0,2493	4,0108	0,9703	76
15	0,2588	0,2679	3,7321	0,9659	75
16	0,2756	0,2867	3,4874	0,9613	74
17	0 ,2924	0,3057	3,2709	0,9563	73
18	0,3090	0,3249	3,0777	0,9511	72
19	0,3256	0,3443	2,9042	0,9455	71
20	0,3420	0,3640	2,7475	0,9397	70
21	0,3584	0,3839	2,6051	0,9336	69
22	0,3746	0,4040	2,4751	0,9272	68
23	0,3907	0,4245	2,3559	0,9205	67
24	0,4067	0,4452	2,2460	0,9135	66
25	0,4226	0,4663	2,1445	0,9063	65
26	0,4384	0,4877	2,0503	0,8988	64
27	0,4540	0,5095	1,9626	0,8910	63
28	0,4695	0,5317	1,8807	0,8829	62
29	0,4848	0,5543	1,8040	0,8746	61
30	0,5000	0,5774	1,7321	0,8660	60
31	0,5150	0,6009	1,6643	0,8572	59
32	0,5299	0,6249	1,6003	0,8480	58
33	0,5446	0,6494	1,5399	0,8387	57
34	0,5592	0,6745	1,4826	0,8290	56
35	0,5736	0,7002	1,4281	0,8192	55
36	0,5878	0,7265	1,3764	0,8090	54
37	0,6018	0,7536	1,3270	0,7986	53
38	0,6157	0,7813	1,2799	0,7880	52
39	0,6293	0,8098	1,2349	0,7771	51
40	0,6428	0,8391	1,1918	0,7660	50
41	0,6561	0,8693	1,1504	0,7547	49
42	0,6691	0,9004	1,1106	0,7431	48
43	0,6820	0,9325	1,0724	0,7314	47
44	0,6947	0,9657	1,0355	0,7193	46
45	0,7071	1,0000	1,0000	0,7071	45
	Cosinus	Cotangentes	Tangentes	Sinus	Angle

Exercices

1) Construis un triangle EFG tel que EF = 3cm, EG = 4cm et FG = 5cm.

   a) Démontre ce triangle est rectangle.

   b) Recopie et complète les phrases suivantes avec « adjacent », « opposé » ou « l'hypoténuse »

   - Le côté [EF]est … à l'angle $\widehat{G}$.
   - Le côté [EG]est … à l'angle $\widehat{G}$.
   - Le côté [FG]est … du triangle EFG.
   - Le côté [EG]est … à l'angle $\widehat{F}$.

   c) Recopie et complète les phrases suivantes avec « Le sinus », « Le cosinus » ou « La tangente »

   - … de l'angle $\widehat{G}$ est égal (e) à $\frac{3}{4}$.
   - … de l'angle $\widehat{G}$ est égal (e) à $\frac{4}{5}$.
   - … de l'angle $\widehat{F}$ est égal (e) à $\frac{4}{3}$.
   - … de l'angle $\widehat{F}$ est égal (e) à $\frac{4}{5}$.

2) Dans le triangle ABC rectangle en A.

   a) On donne AC = 4, AB =5.

   Calcule BC, $\cos\widehat{B}$, $\cos\widehat{C}$, $\sin\widehat{B}$, $\sin\widehat{C}$, $\tan\widehat{B}$ et $\tan\widehat{C}$

   b) On donne BC = 12, $\cos\widehat{B} = \frac{2}{3}$.

   Calcule AC, AB, $\sin\widehat{B}$, $\cos\widehat{C}$, $\sin\widehat{C}$, $\tan\widehat{B}$ et $\tan\widehat{C}$

   c) On donne AC = 15,$\sin\widehat{C} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

   Calcule BC, AB, $\tan\widehat{B}$, $\tan\widehat{C}$ $\cos\widehat{C}$, $\cos\widehat{B}$, et, $\sin\widehat{B}$.

3) $\boldsymbol{\alpha}$ est un angle aigu.

   a) On donne $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$. Calcule $\sin\alpha$.

   b) On donne $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. Calcule $\sin\alpha$.

   c) On donne $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$. Calcule $\cos\alpha$.

Orthogonalité de deux vecteurs

I. RECONNAITRE SI DEUX VECTEURS SONT ORTHOGONAUX

Dans un repère orthonormé, deux vecteurs $\vec{u}\binom{a}{b}$ *et* $\vec{v}\binom{a'}{b'}$ sont orthogonaux lorsque $aa' + bb' = 0$. *On note* $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Activité 1

Consigne 1 : Les vecteurs suivants sont-ils orthogonaux ?

$\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v_1}\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}3\\-8\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v_2}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$

Consigne 2 : Soit A (-2 ; 1), B (4 ; 3) et C (-1 ; y).

Calcule y pour que $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ soient orthogonaux.

II. VECTEURS ORTHOGONAUX ET TRIANGLE

Activité 2

Consigne : Dans un repère orthonormé, place les points :

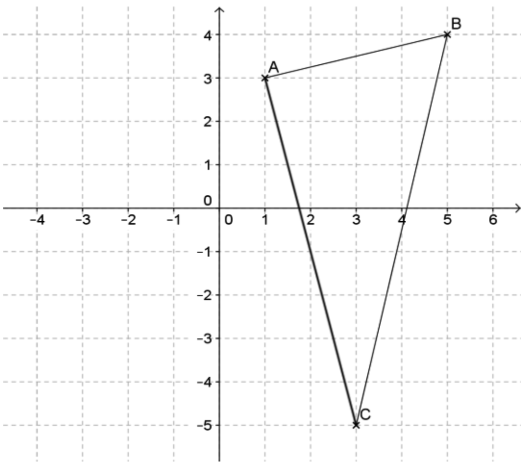
A (1 ; 3), B (5 ; 4) et C (3 ; -5)

Démontre que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux. En déduis la nature du triangle ABC.

Exemple de réponse

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-8\end{pmatrix}$; $\quad on a : 4 \times 2 + 1 \times (-8) = 8 - 8 = 0 \;\; alors \;\; \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$

On en déduit que le triangle ABC est rectangle en A.



Exercices

1) Parmi les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ *et* $\vec{w}$, deux sont orthogonaux. Trouve-les dans les cas suivants :

   a) $\vec{u}(-2; 3), \vec{v}(4; 2{,}5)$ *et* $\vec{w}\left(3\sqrt{3}; 2\sqrt{3}\right)$

   b) $\vec{u}\left(\frac{2}{5}; \frac{7}{10}\right), \vec{v}\left(-\frac{2}{5}; 0{,}2\right)$ *et* $\vec{w}\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$

   c) $\vec{u}\left(\sqrt{5}-2;\ \sqrt{3}+2\right), \vec{v}\left(2+\sqrt{5};\ \sqrt{5}-2\right)$ *et* $\vec{w}\left(2+\sqrt{3}; 2-\sqrt{5}\right)$

2) Détermine la valeur de m pour laquelle les vecteurs $\vec{\mathrm{u}}(2\mathrm{m}; \mathrm{m}-3)$ et $\vec{\mathrm{v}}(2;\ -1)$ sont orthogonaux. Donne alors les coordonnées de $\vec{\mathrm{u}}$.

3) Détermine les valeurs de m pour lesquelles les vecteurs $\vec{\mathrm{u}}(\mathrm{m}+3; 8)$ et $\vec{\mathrm{v}}(\mathrm{m}-3;\ -2)$ sont orthogonaux. Dans chaque cas donne les coordonnées de $\vec{\mathrm{u}}$ et $\vec{\mathrm{v}}$.

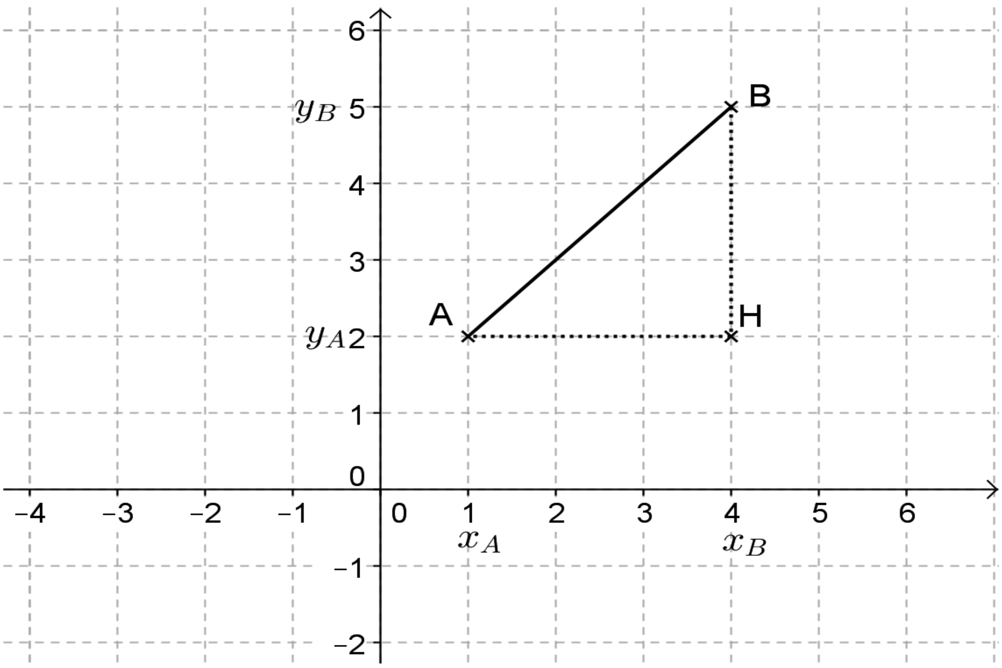
Distance de deux points-norme d'un vecteur dans un repère orthonormé

I. DISTANCE DE DEUX POINTS

Activité 1

Consigne 1 : Observe la figure suivante où le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est orthonormé et le triangle ABH est rectangle en H.

1) Détermine la distance AH en fonction de x_A *et* x_B puis la distance BH en fonction de y_A *et* y_B.
2) Applique le théorème de Pythagore au triangle ABH.



Exemple de réponse

1) La distance AH par rapport à l'axe $(O;\vec{\imath},)$: $AH = |x_B - x_A|$

   La distance BH par rapport à l'axe $(O;\vec{\jmath})$: $BH = |y_B - y_A|$
2) Application du théorème de Pythagore au triangle ABH :

   $AB^2 = AH^2 + BH^2$ *en remplaçant AH et BH par leur expression, on*

$$on\ a : AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

Dans un repère orthonormé, la distance de deux points A et B se note d (A, B) ou simplement AB et on a :

$$\mathbf{d(A,B)} = \sqrt{(\mathbf{x_B} - \mathbf{x_A})^2 + (\mathbf{y_B} - \mathbf{y_A})^2}$$

$$\mathbf{AB^2} = (\mathbf{x_B} - \mathbf{x_A})^2 + (\mathbf{y_B} - \mathbf{y_A})^2$$

Exemple : On donne A (2 ; -1), B (-4 ; 3)

Calculons d(A,B) et d(B,A)

$$\boldsymbol{d(A,B)} = \sqrt{(\boldsymbol{x_B} - \boldsymbol{x_A})^2 + (\boldsymbol{y_B} - \boldsymbol{y_A})^2} = \sqrt{(\mathbf{-4-2})^2 + (\mathbf{3+1})^2} = \mathbf{2\sqrt{13}}$$

$$\boldsymbol{d(B,A)} = \sqrt{(\boldsymbol{x_A} - \boldsymbol{x_B})^2 + (\boldsymbol{y_A} - \boldsymbol{y_B})^2} = \sqrt{(\mathbf{2+4})^2 + (\mathbf{-1-3})^2} = \mathbf{2\sqrt{13}}$$

Remarque : En général **d (A, B) = d (B ; A)**

Consigne 2 : Dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, place les points A (-4 ; -1), B (0 ; 5) et C (2 ; -5).

1) Calcule les distances AB, AC et BC.
2) Donne la nature du triangle ABC.

II. DISTANCE ET CERCLE

Un point A appartient (ou est élément) à un cercle C(O,r) lorsque $\mathrm{d(O,A)} = \mathrm{r}$. $\mathrm{A} \in \mathrm{C(O,r)}$.

Activité 2

Consigne : Dans un repère orthonormé, on donne A(-4 ; 5) et B(2 ; -3).

Montre que B est élément du cercle C(A, 10)

Exemple de réponse

On calcule

$$\boldsymbol{d(A,B)} = \sqrt{(\boldsymbol{x_B} - \boldsymbol{x_A})^2 + (\boldsymbol{y_B} - \boldsymbol{y_A})^2} = \sqrt{(\mathbf{2+4})^2 + (\mathbf{-3-5})^2}$$

$$\boldsymbol{AB} = \sqrt{\mathbf{100}} = \mathbf{10}$$

$$\boldsymbol{AB} = \mathbf{10}\ \boldsymbol{alors}\ \boldsymbol{B} \in \boldsymbol{C(A,10)}$$

Remarque : Le centre du cercle circonscrit à un triangle rectangle est le milieu de l'hypoténuse, son rayon est $\mathbf{r} = \frac{\mathbf{hypoténuse}}{\mathbf{2}}$

Activité 3

Consigne : Dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, place les points A (1 ; 3), B (2 ; -1) et C (6 ; 0).

1) Donne la nature du triangle ABC.
2) Soit C le cercle circonscrit au triangle ABC.

a) Calcule son rayon r.

b) Montre que D (5 ;4) appartient à ce cercle.

Exemple de réponse

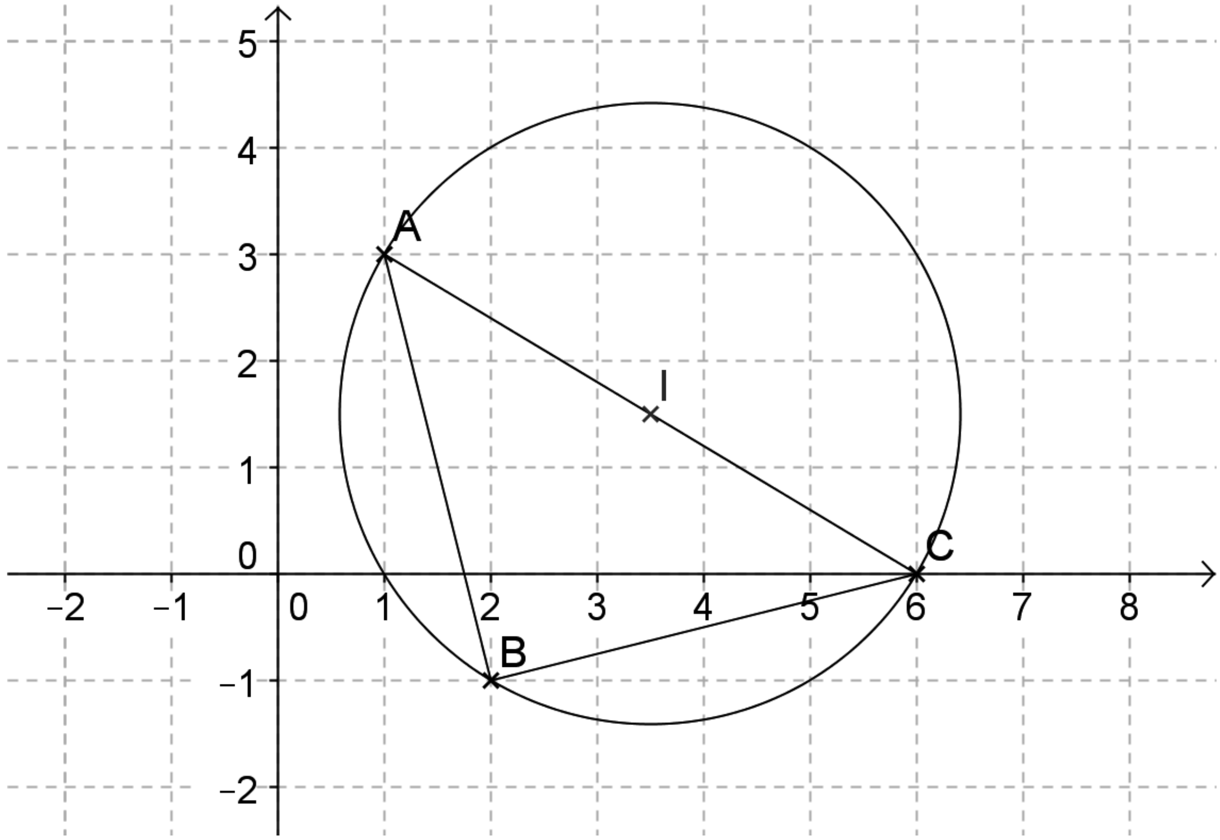
1) $AB = \sqrt{17}$; $AC = \sqrt{34}$; $BC = \sqrt{17}$ $\quad AB = BC$ *alors le triangle ABC est isocèle.* $AB^2 + BC^2 = AC^2$ *alors le triangle ABC est rectangle en B*

Conclusion : *Le triangle ABC est rectangle et isocèle en B.*

2) *Le triangle ABC étant rectangle en B*

$a)$ *Le rayon* : $r = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{\sqrt{34}}{2}$ *Le centre* $I\left(\dfrac{7}{2}; \dfrac{3}{2}\right)$

$b)$ $ID = \dfrac{\sqrt{34}}{2}$ *alors D appartient au cercle de centre I et de rayon r.*



III. NORME D'UN VECTEUR

Définition : La norme d'un vecteur est la longueur de ce vecteur, on note par exemple $\| \overrightarrow{AB} \|$ se lit « norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ »

$\| \vec{u} \|$se lit « norme du vecteur $\vec{u}$ »

Formule :

$\| \overrightarrow{\mathbf{AB}} \| = \sqrt{(\mathbf{x_B} - \mathbf{x_A})^2 + (\mathbf{y_B} - \mathbf{y_A})^2}$

si $\vec{\mathbf{u}}\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{y}\end{pmatrix}, \| \vec{\mathbf{u}} \| = \sqrt{\mathbf{x^2} + \mathbf{y^2}}$

Remarque: $\|\overrightarrow{AB}\| = d(A, B) = AB$

Activité 4

Consigne 1 : Calcule les normes des vecteurs $\vec{u}(2; 3)$ *et* $\vec{v}(-4; 5)$

Consigne 2 : Dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, place les points D (0 ; -2), E (-1 ;1) et C (6 ; 0). Calcule les normes des vecteurs $\overrightarrow{\mathbf{DE}}$, $\overrightarrow{\mathbf{EF}}$ et $\overrightarrow{\mathbf{DF}}$ puis démontre que le triangle DEF est rectangle.

Exercices

Dans tous ces exercices, le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) Dans les cas suivants, on donne les points A, B, C. Calcule les distances AB, AC et BC puis donne en justifiant la particularité du triangle ABC.
   a) $A(1;4), B(4;8)\ et\ C(5;1)$
   b) $A\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right), B\left(\frac{1}{6};\frac{7}{6}\right)\ et\ C\left(\frac{5}{6};\frac{1}{2}\right)$
   c) $A(-1;1), B\left(\sqrt{2}-1;\sqrt{2}+1\right)\ et\ C\left(\sqrt{2}-1;-\sqrt{2}+1\right)$
   d) $A(0;1), B\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)\ et\ C\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$
2) Calcule la norme de chacun des vecteurs !
   a. $\vec{u}(-2;3), \vec{v}(4;2{,}5)\ et\ \vec{w}\left(3\sqrt{3};2\sqrt{3}\right)$
   b. $\vec{u}\left(\frac{2}{5};\frac{7}{10}\right), \vec{v}\left(-\frac{2}{5};0{,}2\right)\ et\ \vec{w}\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$
   c. $\vec{u}\left(\sqrt{5}-2;\ \sqrt{3}+2\right), \vec{v}\left(2+\sqrt{5};\ \sqrt{5}-2\right)\ et\ \vec{w}\left(2+\sqrt{3};2-\sqrt{5}\right)$
3) Soit A(2 ; -1) ; B(5 ; 3) et C(x+1 ; 1).

   Dans les cas suivants, place A et B, puis construis C et calcule x de façon que :
   a) Le triangle ABC soit rectangle en A ;
   b) Le triangle ABC soit rectangle en C ;
   c) Le triangle ABC soit isocèle en A.
4) On considère les points A (-2 ; 1), B (3 ; 6), C (4 ; -1) et D (a ; b).
   a) Calcule a et b tel que ABCD soit un parallélogramme.

   Calcule les coordonnées du centre I de ce parallélogramme.

   Dans la suite de l'exercice, D (-1 ; -6).
   b) Détermine une équation de la droite (BD).

   Calcule les coordonnées du point E intersection de la droite (BD) avec l'axe des ordonnées.

c) Calcule d(E,A), d(E,C) et d(A,C). Précise la nature du triangle AEC.

d) Précise le centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle AEC. Montre que le point F (2 ; -3) appartient à ce cercle.

e) Place tous les points dans le repère et trace le parallélogramme, le triangle et le cercle.

5) On considère les points A, B et C définis par :

$$\overrightarrow{OA} = 2\,\vec{j},\ \ \overrightarrow{OB} = 4\,\vec{i} - \vec{j},\ \ \overrightarrow{OC} = -\frac{3}{8}\overrightarrow{OA} - \frac{7}{4}\overrightarrow{OB}$$

1) Ecris les coordonnées des points A, B et C puis place ces points dans le repère.

2) Soit H l'image de B dans la symétrie de centre A.
Calcule d^2(B,H) ; d^2(H,C) ; d^2(B,C) et donne la nature du triangle HBC.

6) On considère les points $A(5;9); B(-3;1) et\ C(9;5)$

a) Calcule $\|\overrightarrow{AB}\|; \|\overrightarrow{BC}\|; \|\overrightarrow{AC}\|$ En déduire la nature du triangle ABC.

b) Calcule le cosinus et la tangente de l'angle géométrique $\widehat{ABC}$.

7) On donne les points E ; F et G définis de la manière suivante :

$$\overrightarrow{OE} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}\,;\ \overrightarrow{OF} = -\vec{\imath} + 3\vec{\jmath};\ \overrightarrow{OG} = 2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$$

a) Trouve les coordonnées des points E ; F ; G, puis place-les dans le repère.

b) Trouve la nature du triangle EFG après avoir calculé les longueurs de ses côtés.

c) Trouve la mesure du secteur angulaire [EFG] et calcule le cosinus de [FGE]

d) Calcule les coordonnées du point H, symétrique de E par rapport au milieu I de [FG].

e) Dis la nature du quadrilatère FEGH. Justifie ta réponse.

Conditions de perpendicularité de deux droites

I. RECONNAITRE SI DEUX DROITES SONT PERPENDICULAIRES

- **Les deux droites ont une équation de la forme ax + by = c**

Dans un repère orthonormé, deux droites

$(\triangle) : \boldsymbol{ax + by = c}$ *et* $(\triangle') : \boldsymbol{a'x + b'y = c'}$ sont **orthogonales** (perpendiculaires) lorsque : $\boldsymbol{aa' + bb' = 0}$

- **Les deux droites ont une équation de la forme : y = ax + b**

$(\triangle) : \boldsymbol{y = ax + b}$ *et* $(\triangle') : \boldsymbol{y = a'x + b'}$

sont **orthogonales** (perpendiculaires) lorsque : $\boldsymbol{aa' = -1}$

Activité 1

Consigne 1 : Les droites (D) et (D') sont-elles perpendiculaires dans les cas suivants :

a) (D) : $3x - 4y + 7 = 0$ et (D') : $2x + 1{,}5y = 1$

b) (D) : $x\sqrt{2} + y = 3$ et (D') : $x\sqrt{2} - 2y = -5$

Consigne 2 : Les droites (D) et (D') sont-elles perpendiculaires dans les cas suivants :

a) (D) : $y = -3x + 2$ et (D') : $y = \frac{1}{3}x - 5$

b) (D) : $y = (\sqrt{2} - \sqrt{3})x - 1$ et (D') : $y = (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + 7$

II. EQUATION D'UNE DROITE PASSANT PAR UN POINT ET PERPENDICULAIRE A UNE DROITE D'EQUATION DONNEE

Activité 2

Consigne 1 : Détermine une équation de la droite $(\boldsymbol{\Delta})$ passant par le point **A (-3 ; 1**) et perpendiculaire à la droite **(d) :** $\boldsymbol{x + 4y + 7 = 0}$.

Consigne 2 : Détermine une équation de la droite $\boldsymbol{\Delta'}$ passant par le point **B (1 ; 1**) et perpendiculaire à droite **(d') :** $\boldsymbol{y = -5x + 1}$.

III. EQUATION DE LA MEDIATRICE D'UN SEGMENT

Définition 1 : La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment en son milieu.

Définition 2 : La médiatrice d'un segment est l'ensemble des points équidistant (égale distance) des extrémités de ce segment.

Exemple : Dans un repère orthonormé, on donne les deux points A (-3 ; -2) et B (1 ; -4).

En utilisant chacune des deux définitions, détermine une équation de la médiatrice Δ du segment [AB].

Exemple de réponse

En utilisant la définition 1 :

On calcule les coordonnées du milieu de [AB].

Soit I milieu de [AB]. I(-1 ; -3)

$\overrightarrow{\mathbf{AB}}\begin{pmatrix}\mathbf{4}\\\mathbf{-2}\end{pmatrix}$ **est un vecteur directeur de** $(\mathbf{AB})$.

Soit M(x ; y) ∈ (∆)

$\mathbf{I} \in (\Delta)$donc $\overrightarrow{\mathbf{IM}} \perp \overrightarrow{\mathbf{AB}}$ d'où l'équationde (Δ) : $\begin{pmatrix}\mathbf{x+1}\\\mathbf{y+3}\end{pmatrix} \rightrightarrows \begin{pmatrix}\mathbf{4}\\\mathbf{-2}\end{pmatrix}$

$4(x+1) - 2(y+3) = 0$

$(\Delta):\ 2x - y - 1 = 0$

En utilisant la définition 2 :

Soit M(x ; y) un point de la médiatrice (∆) du segment [AB] alors AM = BM équivaut à $AM^2 = BM^2$.

$(x - xA)^2 + (y - yA)^2 = (x - xB)^2 + (y - yB)^2$

$(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = (x - 1)^2 + (y + 4)^2$

$(\Delta):\ 2x - y - 1 = 0$

Exercices

1) Dans les cas suivants, les droites (Δ) et $(\mathcal{D})$ sont-elles perpendiculaires ?

   a) $(\Delta): 2x + 3y = 2$ et $(\mathcal{D}): -3x + 2y = 1$

   b) $(\Delta): x - y = 0$ et $(\mathcal{D}): 2x + 2y = -5$

   c) $(\Delta): x - y = -2$ et $(\mathcal{D}): x + y = 6$

   d) $(\Delta): y = \frac{5}{2}x + 3$ et $(\mathcal{D}): y = -\frac{2}{5}x - 3$

   e) $(\Delta): x\sqrt{3} - 3y = 4$ et $(\mathcal{D}): 3x + y\sqrt{3} = -7$

   f) $(\Delta):\ y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - 1$ et $(\mathcal{D}): y = \frac{3}{\sqrt{3}}x + 2$

2) Détermine une équation de la droite $(\mathcal{D})$ passant par A et perpendiculaire à (Δ).

   a) A (1 ; 3) et (Δ) : $5x - 3y = -4$

   b) A (0 ; 0) et (Δ) : $y = -2x + 5$

   c) A $(3\ ;\ -\sqrt{2})$ et (Δ) : $x - 3 = 0$

   d) A (0 ; 17) et (Δ) : $x\sqrt{3} - y = -17$

3) Dans un repère orthonormé du plan, on donne les points

   A (0 ; 3) ; B (-4 ; 0) ; D (2 ; 0) et C (0 ; a) $a \in \mathbb{R}$.

   Détermine le réel a pour que les droites (AB) et (CD) soient perpendiculaires.

4) Dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan, place les points

   A (2 ; 0) ; B (3 ; 4).

   a) Détermine une équation de la médiatrice de chacun des segments [OA] et [OB].

   b) Calcule les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle OAB et le rayon de ce cercle.

5) Soit (d) la droite d'équation $2x + 3y + 6 = 0$ et (Δ) la droite d'équation $y = mx$ $(m \in \mathbb{R})$

Détermine m pour que les droites (d) et (Δ) soient orthogonales. Calcule alors les coordonnées de leur point d'intersection.

6) Tu as un repère orthonormé et les points A(1 ; 3), B(-1 ; -1), C(3 ; 1)
   a) Calcule les coordonnées de M symétrique de A par rapport au milieu I de [BC] ; puis les coordonnées de H tel que C milieu de [BH].
   b) Calcule les coordonnées du milieu R de [AM].
   c) Quelle est la nature de ABMC ?
   d) Trouve une équation de chacune des droites (AB) ; (BH) et (AM).
   e) Trouve une équation de (Δ) passant par A et perpendiculaire à (MH), puis une équation de (Δ') passant par B et parallèle à (Δ).
   f) Démontre que les droites d : $3x - 7y + 14 = 0$ et d' : $6x - 14y = -5$ sont parallèle et que les droites d_1 : $3x + 2y = -1$ et d_2 : $2x - 3y = -5$ sont perpendiculaires.

7) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'origine **O**, place les points **A(2 ;6)** et **B(-2 ;4).**
   1. a) Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ *et* $\overrightarrow{\boldsymbol{OB}}$.
      b) Calcule les longueurs **AB** et **OB.**
      c) Démontre que les droites **(AB)** et **(OB)** sont perpendiculaires.
      d) Quelle est la nature du triangle **OAB** ?
   2. Ecris une équation de la droite **(AB).**
   3. La droite **(AB)** coupe l'axe des abscisses en **C.**
      a) Calcule les coordonnées du point **C.**
      b) Calcule la longueur **BC.**
   4. La perpendiculaire à la droite **(AB)** en **A** coupe l'axe des abscisses en **H.** Que peux-tu dire des droites **(AH)** et **(OB)** ? Calcule **OH.**

Symétries laissant invariantes les figures usuelles

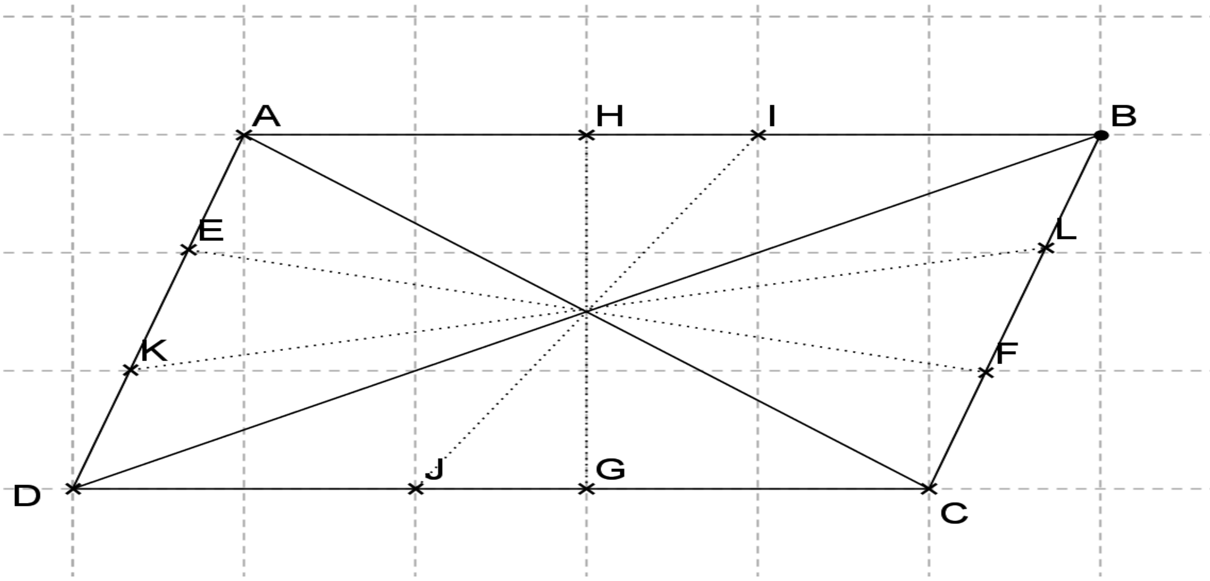
I. CENTRE DE SYMETRIE D'UNE FIGURE

Activité 1

Consigne : Construis un parallélogramme ABCD et son centre O.

1) Complète $S_O(A) = \dots$; $S_O(B) = \dots$; $S_O(C) = \dots$; $S_O(D) = \dots$
2) Place plusieurs points sur le parallélogramme et construis leurs images par S_O. que constates-tu ?

Exemple de réponse



Constat : Chaque point du parallélogramme a son symétrique par rapport à O sur le parallélogramme.

Interprétation du constat : On dit que **O** est un **centre de symétrie** pour le parallélogramme ABCD.

II. AXE DE SYMETRIE D'UNE FIGURE

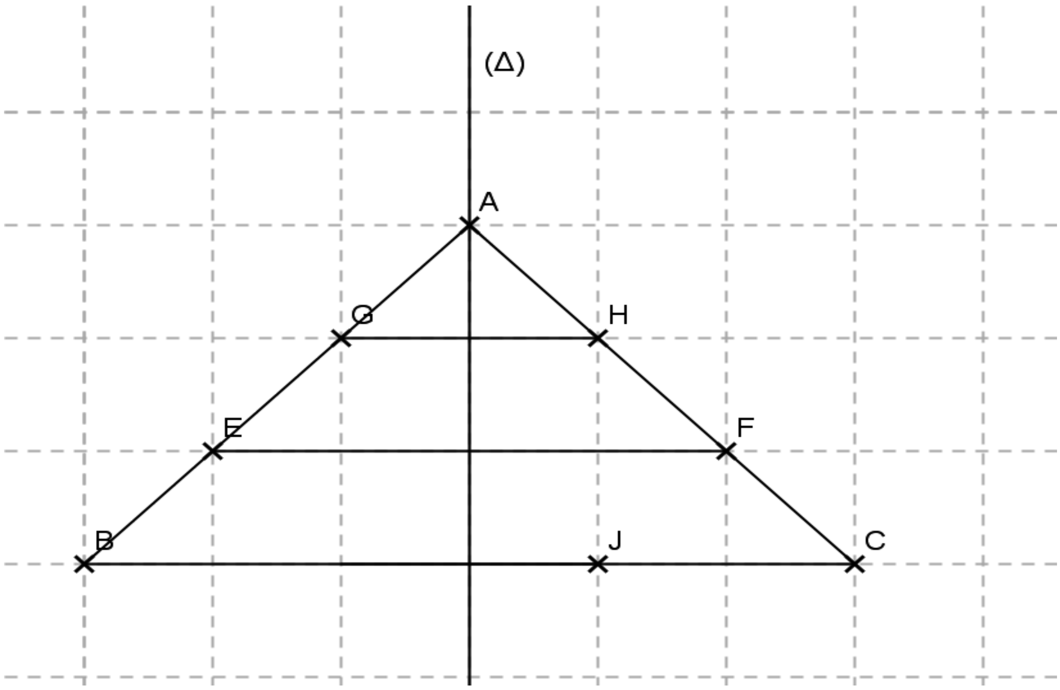
Activité 2

Consigne : Soit ABC un triangle isocèle de sommet A (AB = AC). Construis la médiatrice (Δ) de [BC].

1) Complète $S_{(\Delta)}(A) = \dots$; $S_{(\Delta)}(B) = \dots$; $S_{(\Delta)}(C) = \dots$

2) Place plusieurs points sur le triangle et construis leurs images par S_O. que constates-tu ?

Exemple de réponse



Constat : Chaque point du triangle a son symétrique par rapport à (Δ) sur le triangle.

Interprétation du constat : On dit que **(Δ)** est un **axe de symétrie** pour le triangle ABC.

Définition d'un centre de symétrie : Dire qu'une figure admet un point O pour centre de symétrie signifie que cette figure est invariante par $\mathbf{S_O}$.

Définition d'un axe de symétrie : Dire qu'une figure admet une droite **(Δ)** pour axe de symétrie signifie que cette figure est invariante par $\mathbf{S_{(\Delta)}}$.

N.B : Les centres et axes de symétrie d'une figure sont ses éléments de symétrie de cette figure.

Activité 3

Consigne 1 : Dessine et nomme les éléments de symétrie d'un segment [AB] et d'une droite (d).

Exemple de réponse

Les éléments de symétrie d'un segment sont : son milieu et sa médiatrice.

Théorème : Les éléments de symétrie d'une droite (d) sont :

- La droite (d) elle-même ;
- Toute droite perpendiculaire à (d) ;
- Tout point de (d).

Consigne 2 : Dessine et nomme les éléments de symétrie d'un carré

Théorème : Le carré a cinq éléments de symétrie ;

- Le centre ;
- Les deux médiatrices des côtés opposés ;
- Les deux diagonales.

Consigne 3 :

1) Ecris les théorèmes analogues pour les rectangles et les losanges.
2) Démontre que le centre d'un cercle est centre de symétrie pour le cercle.

Exercices

1) Nomme et construis les éléments de symétrie de chacune des figures suivantes :
    a) d’un triangle équilatéral ;
    b) d’un demi-cercle ;
    c) d’un quart de cercle ;
    d) d’un hexagone régulier ;
    e) d’une figure formée par deux droites perpendiculaires ;
    f) d’une figure formée par deux droites parallèles
2) Cite les lettres de l’alphabet qui,
    a) ont un centre de symétrie ;
    b) ont un axe de symétrie « vertical »
    c) ont un axe de symétrie « horizontal »
    d) n’ont d’éléments de symétrie.
3) Construis un triangle ABC isocèle de sommet principal A.

    Nomme et construis l’axe de symétrie du triangle ABC.
4) Soit ABCD un trapèze isocèle (AD = BC) et (Δ) la médiatrice de [AB].
    a) Fais une figure.
    b) Montre que (Δ) est aussi la médiatrice de [DC].
    c) Montre que les diagonales [AC] et [BD] ont même longueur.
    d) En déduis que tout trapèze isocèle admet un axe de symétrie.
5) Construis deux cercles concentriques ($\mathcal{C}$) et ($\mathcal{C}$’) de rayon respectifs r et r’.

    Nomme les éléments de symétrie de ($\mathcal{C}$) et ($\mathcal{C}$’).